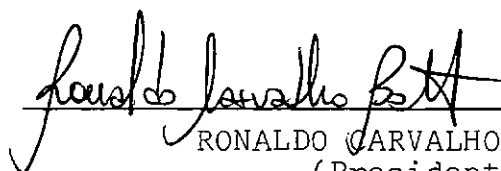
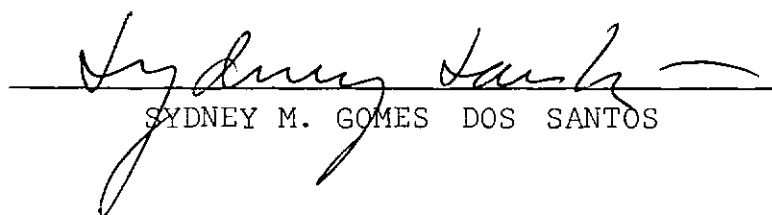


## ESTABILIDADE LOCAL DE PAINÉIS CILÍNDRICOS ENRIJECIDOS

MANOEL RODRIGUES JUSTINO FILHO

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE  
PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE  
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO  
DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.)

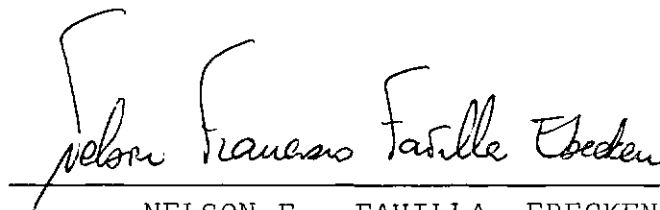
Aprovada por:

RONALDO CARVALHO BATISTA  
(Presidente)

SYDNEY M. GOMES DOS SANTOS



ABIMAEEL FERNANDO DOURADO LOULA



NELSON F. FAVILLA EBECKEN

Rio de Janeiro - Brasil

Junho de 1982

JUSTINO FILHO, MANOEL RODRIGUES

Estabilidade Local de Painéis Cilíndricos  
Enrijecidos (Rio de Janeiro) 1982

viii, 123 p. 29,7 cm. (COPPE/UFRJ, M.Sc., En-  
genharia Civil, 1982).

Tese - Univ. Fed. Rio de Janeiro, Fac. de  
Engenharia.

1. Instabilidade de Cascas I. COPPE/UFRJ  
II. Título (Série)

"A Meus Pais e Irmãos:  
pelo tempo que tenho  
estado longe sem poder  
me dedicar a vocês... "

## AGRADECIMENTOS

Ao Prof. RONALDO CARVALHO BATISTA pelos conhecimentos adquiridos na área de estabilidade estrutural e pela incansável e valiosa orientação em todas as etapas deste trabalho.

Ao Prof. JOSÉ DE AUGUSTO QUEIROZ da FUEL pelo apoio e incentivo à Pós-Graduação.

A todos os professores da COPPE pelos ensinamentos recebidos.

Aos colegas do curso de Pós-Graduação da COPPE, em especial ao amigo Paulo Batista Gonçalves pela ajuda e pelos comentários durante as fases difíceis deste trabalho.

À Comissão Nacional de Energia Nuclear (CNEN) pelo incentivo à pesquisa científica, através do suporte financeiro dos meus estudos de Pós-Graduação.

A Sueli Braga e Sebastião Gilmar Fernandes pela primorosa composição tipográfica e gráfica do presente trabalho.

## RESUMO

Apresentam-se resultados de cargas de bifurcação primárias e secundárias e também os resultados de uma análise não linear da estabilidade elástica local de cascas cilíndricas enrijecidas longitudinalmente sob compressão axial.

Os efeitos causados pela esbeltez e espaçamento dos enrijecedores, interação modal e imperfeições geométricas iniciais são investigados.

Mostra-se que a utilização de enrijecedores esbeltos, da maneira sugerida pela Teoria Ortotrópica, pode conduzir a interação entre modos locais e globais de deformação, resultando em cargas de bifurcação primária inferiores à carga crítica clássica da casca isotrópica. A possibilidade de ocorrência de interação entre modos primários e secundários, em função do índice de esbeltez e imperfeições iniciais, é também evidenciada.

O presente trabalho constitui assim uma contribuição a um melhor entendimento do comportamento e estabilidade dessas cascas e também serve como uma primeira orientação para escolha adequada de parâmetros geométricos numa fase de pré-projeto.

## ABSTRACT

Results from primary and secondary bifurcation loads and also results from a non-linear analysis of elastic local stability of stringer stiffened cylindrical shells under axial compression are presented.

The effects due to stiffeners spacing and slenderness as well as modal interaction and initial geometric imperfections are investigated.

It is shown that the use of slender stiffeners as suggested by the orthotropic theory, can lead to interaction between local and overall modes resulting in primary bifurcation loads lower than the classical critical load for the isotropic shell. It is also indicated that interaction between primary and secondary buckling modes can occur and this is, in general, a function of stiffeners slenderness and imperfection levels.

The present work constitutes then a contribution towards a better understanding of the behaviour and stability of these shells. Moreover it could serve as a guideline for adequate choice of geometric parameters for design.

## ÍNDICE

## CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO

I.1	- Considerações Iniciais .....	02
I.2	- Estudos anteriores sobre o assunto .....	03
I.3	- Objetivos e procedimentos do presente trabalho .....	06

CAPÍTULO II - ESTABILIDADE ELÁSTICA DE CASCAS CILÍNDRICAS  
GEOMETRICAMENTE PERFEITAS

II.1	- Estabilidade Global: Consideração de Ortotropia	09
II.1.1	- Análise Clássica de Cargas Críticas ..	09
II.1.2	- Influência da Variação de Parâmetros Geométricos dos Enrijecedores sobre a Carga Crítica .....	18
II.2	- Estabilidade Local: Análise Crítica e Pós-Crítica .....	21
II.2.1	- Hipóteses Gerais de Análise: Escolha das funções deslocamento .....	21
II.2.2	- Funcional de Energia .....	23
II.2.3	- Caminho de Equilíbrio Fundamental ....	25
II.2.4	- Análise de Bifurcação: Estado Crítico de Equilíbrio .....	26
II.2.5	- Análise Pós-Crítica Inicial .....	28
II.2.6	- Influência de Parâmetros Geométricos sobre a carga crítica e sobre a estabilidade do estado crítico de equilíbrio .....	30

CAPÍTULO III - ANÁLISE TEÓRICA NÃO-LINEAR DA FLAMBAGEM  
LOCAL ELÁSTICA DA ESTRUTURA IMPERFEITA

III.1	- Considerações Iniciais e Hipóteses Adotadas ...	37
III.2	- Funcional de Energia .....	39
III.3	- Escolha dos Modos de Deformação e Imperfeições Geométricas Iniciais .....	40

III.4 - Equações não-lineares para a estrutura imperfeita .....	44
CAPÍTULO IV - COMPORTAMENTO NÃO-LINEAR DA ESTRUTURA IMPERFEITA: ANÁLISE DE RESULTADOS TEÓRICOS	
IV.1 - Implementação Numérica de Cálculo .....	52
IV.2 - Análise de Resultados Teóricos .....	52
CAPÍTULO V - O PROBLEMA DA BIFURCAÇÃO SECUNDÁRIA	
V.1 - Condição de Equilíbrio Crítico .....	70
V.2 - Forma dos Modos de Bifurcação Secundária .....	72
V.3 - Funcional de Energia: Forma Incremental Quadrática $\hat{V}_2$ .....	73
V.4 - Equações de Equilíbrio Crítico .....	75
CAPÍTULO VI - ALGUNS RESULTADOS DE CARGAS DE BIFURCAÇÃO SECUNDÁRIA	
VI.1 - Considerações Iniciais .....	81
VI.2 - Análise de Resultados Teóricos .....	81
CAPÍTULO VII - COMENTÁRIOS FINAIS .....	
APÊNDICE A - LISTA DAS VARIÁVEIS E EXPRESSÕES AUXILIARES EMPREGADAS NO DESENVOLVIMENTO DAS EQUAÇÕES .....	92
APÊNDICE B - ENERGIA POTENCIAL TOTAL NA FORMA INCREMENTAL: A VARIAÇÃO TOTAL DE ENERGIA .....	95
APÊNDICE C - CARGA CRÍTICA LOCAL DO CILINDRO ENRIJECIDO PERFEITO .....	106
LISTA DE SÍMBOLOS .....	112
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	120



## CAPÍTULO I

### INTRODUÇÃO

## CAPÍTULO I

## INTRODUÇÃO

## 1.1 - Considerações Iniciais

Cascas cilíndricas enrijecidas são na atualidade de grande utilização como elementos estruturais de Centrais Nucleares, estruturas Off-Shore e indústrias Aeronáutica e Marítima.

Devido a fatores de economia e funcionalidade são empregadas soluções estruturais cada vez mais leves, através de uso de elementos esbeltos.

É bastante sabido que cascas cilíndricas isotrópicas sob compressão axial são altamente sensíveis a imperfeições geométricas iniciais e, devido a este fato, as cargas de instabilidade ou flambagem associadas podem ser bastante inferiores a carga crítica clássica de casca perfeita.

As cascas cilíndricas enrijecidas longitudinalmente com elementos esbeltos apresentam, entretanto, características bastante particulares: as cargas críticas axiais primárias podem ocorrer para carregamentos muito inferiores à carga crítica teórica da casca isotrópica, enquanto que as imperfeições geométricas iniciais têm influência somente sobre a não-linearidade de seu comportamento, geralmente estável em um sentido global.

Considerando durante o dimensionamento destas cascas, os enrijecedores como elementos estruturais discretos, as cargas de colapso da estrutura composta ocorrerão, dado o acoplamento existente entre modos dos enrijecedores e da casca, numa faixa compreendida entre as cargas de colapso do enrijecedor e de painel cilíndrico.

Para cilindros enrijecidos longitudinalmente, sob compressão axial uniforme, existem basicamente dois modos dis-

tintos de colapso, os quais foram observados experimentalmente por Walker e Kemp [1]:

- A - Por Instabilidade Local - O colapso estrutural ocorre de forma localizada nos painéis cilíndricos entre enrijecedores, enquanto que a junção painel-enrijecedor permanece essencialmente reta [2,3,4,5]. Os enrijecedores são esbeltos e bastante espaçados e o colapso por instabilidade local é provocado principalmente pela grande deformabilidade torsional dos enrijecedores esbeltos. Este comportamento é típico de jaquetas de estruturas Off-shore de grande porte, construídos com aço de alta resistência, tendo também sido diversas vezes observado experimentalmente [1] o colapso por mecanismos plásticos;
- B - Por Instabilidade Global - O colapso é global em toda a estrutura, envolvendo deformações radiais significantes tanto dos painéis quanto dos enrijecedores. Esta forma de instabilidade ocorre principalmente em estruturas Aeronáuticas e Aero-Espaciais, cujos enrijecedores são pouco espaçados e torsionalmente rígidos. São geralmente construídos com ligas de alumínio de alta resistência e analisados pela teoria da ortotropia [6,7,8,9,10].

Evidentemente, existe ainda a possibilidade de interação entre formas de colapso local e global, dependendo do espaçamento e das características geométricas dos enrijecedores.

## 1.2 - Estudos Anteriores Sobre o Assunto

A despeito da grande variedade de literatura disponível sobre o comportamento de casca cilíndricas enrijecidas, não existem ainda resultados teóricos totalmente compreensíveis para o estudo de um problema real, envolvendo interação entre modos de deformação e imperfeições geométricas iniciais, plasticidade, tensões residuais, etc.

Em trabalho recente Sridharam e Walker [5] estudaram cilindros de aço com enrijecedores pouco ou muito espaçados. Incluíram, de forma bastante aproximada nesta análise, a interação possível de estabilidade local e global entre enrijecedores e painéis efeitos de plasticidade, influência de imperfeições iniciais e tensões residuais. Para mostrar a validade dos resultados teóricos foram feitas comparações com modelos experimentais [5] e os resultados obtidos foram bastante satisfatórios.

Mas uma análise teórica mais refinada seria muito laboriosa e só recentemente problemas desse tipo têm sido estudados, através de técnicas numéricas.

Por outro lado, o problema simplificado de estabilidade elástica global em cilindros enrijecidos tem sido amplamente estudado de forma semi-analítica [6,7,8].

Arbocz e Willians [11] obtiveram cargas de flambagem global com grande precisão, incluindo na análise uma completa descrição das imperfeições geométricas iniciais.

Todas essas análises, entretanto, ignoram a possibilidade de instabilidade local dos painéis, pois nos casos analisados, os enrijecedores são pouco espaçados e torsionalmente rígidos e são distribuídos uniformemente por toda a casca cilíndrica, permitindo assim que a estrutura seja tratada como sendo uma casca simples de peso equivalente com propriedades ortotrópicas; resultados experimentais [12] confirmam, até certo ponto, a validade destas análises para essas cascas particulares.

O problema de estabilidade local em painéis enrijecidos foi estudado primeiramente por Koiter [13], que tratou os enrijecedores como suportes simples dos painéis, desprezando a influência da rigidez torsional destes sobre o comportamento estrutural dos painéis.

Wang e Lin [14] desenvolveram uma análise para obter cargas críticas, onde os enrijecedores são tratados como vigas de seção transversal de forma arbitrária.

Também Singer [12] desenvolveu uma análise similar, considerando a influência discreta dos enrijecedores interagindo com a casca, representando os enrijecedores como uma descontinuidade linear da espessura da casca cilíndrica, por meio da função delta de Dirac. A complexidade da formulação, entretanto, não permitiu que esta análise fosse além da determinação de cargas críticas.

Mas mesmo para o caso de ortotropia, os resultados teóricos relatados recentemente [9] mostram que um projetista seria naturalmente induzido a adotar enrijecedores bastante esbeltos, na tentativa de melhorar a eficiência estrutural dessas cascas. Porém, constata-se que a adoção de enrijecedores esbeltos possibilitaria a ocorrência de interações entre modos de flambagem local (dos enrijecedores) e global de uma casca ortotrópica.

Syngellakis e Walker [3] propuseram uma análise assintótica para se estudar o mesmo problema de estabilidade local, mas levando em conta os efeitos da rigidez torsional dos enrijecedores sobre o comportamento dos painéis e, consequentemente, sobre as cargas críticas de casca geometricamente perfeita. Os resultados teóricos evidenciam a importância desses efeitos, sugerindo assim a necessidade de suas inclusões em qualquer análise não-linear mais refinada.

Estes mesmos autores desenvolveram posteriormente uma análise complementar para cilindros imperfeitos [2, 4] a qual possibilitou um estudo não-linear da interação entre modos clássicos de deformação e imperfeições iniciais.

### 1.3 - *Objetivos e Procedimentos do Presente Trabalho*

O presente trabalho constitui uma tentativa de ligação entre os tratamentos clássicos e não-lineares mais recentes e seu objetivo principal é apresentar um estudo da interação não-linear multimodos, incluindo modos não clássicos e imperfeições geométricas iniciais e suas influências sobre cargas de bifurcação primária e secundária, associadas a estabilidade local de cilindros enrijecidos longitudinalmente com elementos esbeltos e bastante espaçados.

Para isto o presente estudo segue as mesmas premissas dos trabalhos anteriores de Syngellakis e Walker [2,3,4] mas agora incluindo também para os painéis os modos de deformação dominantes, descritos nas referências [15,16] para cascas isotrópicas, os quais têm sido mostrados resultar em respostas não-lineares elásticas com pronunciada perda de rigidez inicial.

As versões de Budiansky [17] e Seide [18], para a formulação da teoria geral da estabilidade elástica de Koiter [19], são as ferramentas teóricas empregadas na presente análise.

No capítulo II são desenvolvidos estudos analíticos sobre a estabilidade local e global de cascas cilíndricas geometricamente perfeitas, incluindo em cada caso uma discussão dos resultados mais relevantes.

A análise teórica da estabilidade local de cilindros imperfeitos, através da interação entre modos de deformação dominantes e imperfeições iniciais, é feita no capítulo III com o desenvolvimento das equações não-lineares de equilíbrio e no capítulo IV são discutidos resultados teóricos desta análise, para algumas geometrias práticas dessas cascas.

O problema de bifurcação secundária, responsável por uma mudança súbita de configuração, é abordado no capítulo V, onde são desenvolvidas as equações de equilíbrio crítico e o capítulo VI apresenta alguns resultados teóricos para bifurcação secundária, ocorrendo ao longo do caminho fundamental imperfeito.

Finalmente, no capítulo VII são apresentadas algumas observações baseadas nos resultados obtidos neste trabalho e são propostas algumas sugestões para o desenvolvimento de pesquisas futuras sobre a estabilidade elástica local de cilindros enrijecidos.

## CAPÍTULO II

### ESTABILIDADE ELÁSTICA DE CASCAS CILÍNDRICAS ENRIJECIDAS E GEOMETRICAMENTE PERFEITAS



## CAPÍTULO II

ESTABILIDADE ELÁSTICA DE CASCAS CILÍNDRICAS  
ENRIJECIDAS E GEOMETRICAMENTE PERFEITAS

## II.1 - ESTABILIDADE GLOBAL: CONSIDERAÇÃO DE ORTOTROPIA

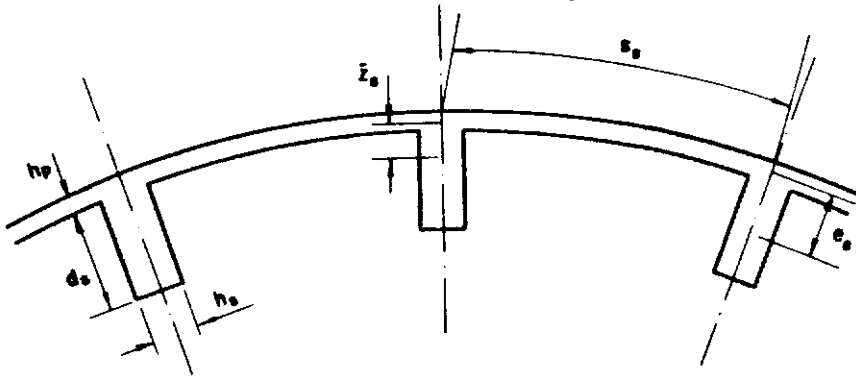
## II.1.1 - Análise Clássica de Cargas Críticas

Para um cilindro enrijecido longitudinalmente, com a geometria representada na figura (II.1.1) e sob compressão axial uniforme, a variação de energia potencial total que ocorre entre um estado descarregado e um estado deformado vizinho, descrito por deslocamento totais ( $u$ ,  $v$ ,  $w$ ) cinematicamente admissíveis, pode ser escrita como,

$$\begin{aligned}
 V_P = & \frac{1}{2} \int_0^\lambda \int_0^{2\pi} \left[ \overline{M_\xi} \chi_\xi + \overline{M_{\xi\beta}} \chi_{\xi\beta} + M_{\beta\xi} \chi_{\beta\xi} + M_\beta \chi_\beta \right] R^2 d\beta d\xi \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^\lambda \int_0^{2\pi} \left[ \overline{N_\xi} \epsilon_\xi + 2 N_{\xi\beta} \epsilon_{\xi\beta} + N_\beta \epsilon_\beta \right] R^2 d\beta d\xi \\
 & + \int_0^{2\pi} \sigma A_\xi h_P \bar{u} \Big|_0^\lambda R^2 d\beta \quad (II.1.1)
 \end{aligned}$$

onde as quantidades envolvidas são definidas na lista de notações e onde as barras superiores indicam aquelas quantidades avaliadas no centróide da seção ortotrópica (as outras demais quantidades são avaliadas na superfície média da casca).

Uma forma conveniente de exame dos vários possíveis caminhos de equilíbrios, descritos com a estacionaridade de  $V_P$ , consiste em se definir inicialmente o caminho fundamental de equilíbrio emergindo de um estado descarregado e indeformado, para o qual  $\sigma=0$ .



$$D_s = d_s/h_s \quad , \quad S_s = s_s/R \quad , \quad \varepsilon = e_s/R \quad \bar{Z}_s = \bar{z}_s/R$$

$$\eta = h_s/h_p \quad , \quad \lambda = l/R \quad , \quad R_p = R/h$$

$$\xi = x/R \quad , \quad \zeta = z/R \quad , \quad s_s = 2\pi R/N$$

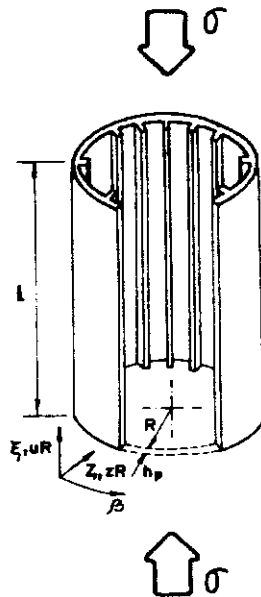


Fig. II.1.1 - Notação e geometria para o cilindro enrijecido circular.

Para o presente problema, tem-se geralmente adotado uma solução axissimétrica aproximada, definindo um estado fundamental de membrana,

$$(\bar{N}_{\xi}^0, N_{\beta}^0, N_{\xi\beta}^0) = (-h_p \sigma A_{\xi}, 0, 0) \quad (\text{II.1.2})$$

$$(\bar{\epsilon}_{\xi}^0, \epsilon_p^0, \epsilon_{\xi\beta}^0) = (-\sigma/E, \nu\sigma/E, 0)$$

$$\bar{M}_{\xi}^0 = M_{\beta}^0 = \bar{M}_{\xi\beta}^0 = M_{\beta\xi}^0 = 0$$

Um possível caminho secundário de equilíbrio pode então ser examinado em termos de deslocamentos incrementais  $\underline{u}_1 = (u_1, v_1, w_1)$ , na vizinhança desse estado fundamental  $\underline{u}_0$ , onde

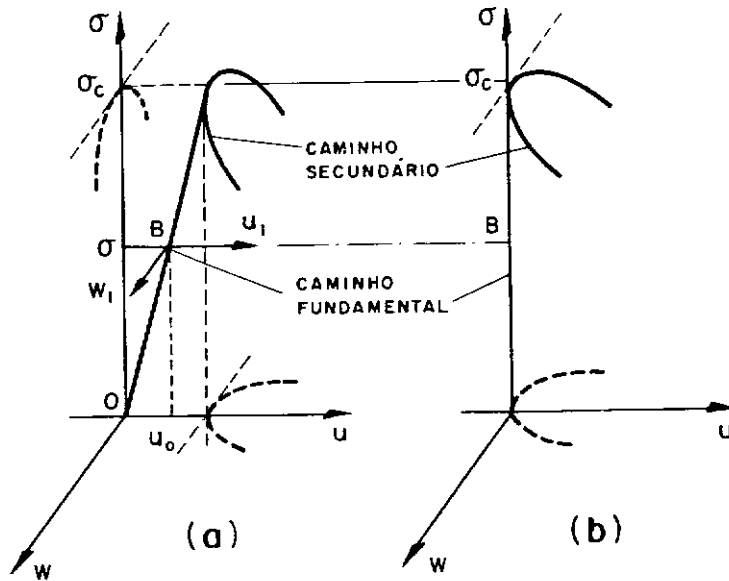
$$\underline{u} = \underline{u}_0 + \underline{u}_1 \quad (\text{II.1.3})$$

Transformações análogas podem ser feitas para as deformações e tensões resultantes,

$$\begin{aligned} \underline{\epsilon} &= \underline{\epsilon}^0 + \underline{\epsilon}^I \\ \underline{\chi} &= \underline{\chi}^0 + \underline{\chi}^I \\ \underline{N} &= \underline{N}^0 + \underline{N}^I \\ \underline{M} &= \underline{M}^0 + \underline{M}^I \end{aligned} \quad (\text{II.1.4})$$

onde o super-índices 0 e I indicam respectivamente os estados fundamental e incremental. As componentes dos tensores em (II.1.4) são definidas na lista de notações.

O efeito das transformações (II.1.3) e (II.1.4) é o mapeamento do caminho fundamental sobre o eixo de tensão  $\sigma$ , conforme é ilustrado na figura (II.1.2).



**Fig. II.1.2 - Caminhos de equilíbrio :**

(a) original

(b) transformado

A estabilidade do equilíbrio de estados fundamentais e, em particular, o nível de carga  $\sigma_c$  para o qual a estabilidade se torna crítica, é controlada pela segunda variação de  $V_p$ , isto é, pela forma quadrática nos deslocamentos incrementais  $(u_1, v_1, w_1)$  obtida da equação (II.1.1), após a utilização das transformações (II.1.3) e (II.1.4).

Usando relações deformação-deslocamento aproximadas da teoria de cascas de Donnell [20] e relações tensão-deformação lineares, a condição de estacionaridade dessa forma quadrática com respeito aos deslocamentos incrementais, tomados na forma,

$$u_1 = U_1 \cos nq\xi \cos p\beta$$

$$v_1 = V_1 \sin nq\xi \sin p\beta \quad ; \quad q = \pi/\lambda \quad (\text{II.1.5})$$

$$w_1 = W_1 \sin nq\xi \cos p\beta$$

para atender às condições de apoio simples em  $\xi = 0, \lambda$ , resulta no problema de autovalor [9],

$$\tilde{A} \tilde{u}_1 - \frac{\sigma_c}{E} \tilde{Q} \tilde{u}_1 = 0 \quad (\text{II.1.6})$$

onde  $\sigma_c$  é a tensão axial crítica,  $\tilde{u}_1^T = \{ U_1, V_1, W_1 \}$  o modo crítico e  $\tilde{A}$  e  $\tilde{Q}$  são matrizes simétricas  $3 \times 3$ , cujos coeficientes são definidos como,

$$A_{11} = A_\xi n^2 q^2 + \frac{1}{2} (1-\nu) p^2$$

$$A_{12} = - \frac{1}{2} (1+\nu) npq$$

$$A_{13} = \nu nq - A_\xi \bar{Z}_s n^3 q^3$$

$$A_{21} = A_{12} \quad (\text{II.1.7})$$

$$A_{22} = p^2 + \frac{1}{2} (1-\nu) n^2 q^2 + \alpha [p^2 + (1-\nu)(1+B_{\xi\beta})n^2 q^2]$$

$$A_{23} = -p - \alpha [ \nu n^2 q^2 p + p^3 + (1-\nu)(1+B_{\xi\beta})n^2 q^2 p ]$$

$$A_{31} = A_{13}$$

$$A_{32} = A_{23}$$

$$A_{33} = \alpha [ B_\xi n^4 q^4 + 2\nu n^2 q^2 p^2 + p^4 (1-\nu)(1+B_{\xi\beta})n^2 p^2 q^2 ]$$

$$+ A_\xi \bar{Z}_s^2 n^4 q^4 + 1$$

e

$$\begin{aligned}
Q_{11} &= Q_{12} = Q_{13} = Q_{21} = Q_{31} = 0 \\
Q_{22} &= -A_{\xi} (1 - \bar{Z}_S)^2 n^2 q^2 + \nu n^2 q^2 \\
Q_{23} &= -A_{\xi} \bar{Z}_S (1 - \bar{Z}_S) n^2 q^2 p \\
Q_{32} &= Q_{23} \\
Q_{33} &= -A_{\xi} (\bar{Z}_S^2 \rho^2 + 1) n^2 q^2 + \nu n^2 q^2
\end{aligned} \tag{II.1.8}$$

onde  $q = \pi/\lambda$  e  $\alpha = h_p^2/(12R^2)$ , sendo os demais parâmetros, ainda não identificados, definidos a seguir.

Com o módulo de elasticidade  $E$  e o coeficiente de Poisson  $\nu$ , a rigidez extensional da casca cilíndrica isotrópica é  $K = E h_p/(1-\nu^2)$  e a flexural,  $D = K h_p^2/12$ .

As constantes  $A_{\xi}$ ,  $B_{\xi}$  e  $B_{\xi\beta}$  são, respectivamente, as razões entre os coeficientes de rigidez extensional, flexural e torsional das seções ortotrópica e isotrópica, definidas como,

$$\begin{aligned}
A_{\xi} &= \frac{K_{\xi}}{K} = 1 + (1-\nu^2) \frac{D_S \eta^2}{S_S R_P} \\
B_{\xi} &= \frac{D_{\xi}}{D} = 1 + 12 \bar{Z}_S^2 R_P^2 + (1-\nu^2) \frac{D_S^2 \eta^4}{S_S R_P} \\
&\quad + 12 (1-\nu) \frac{D_S R_P \eta^2}{S_S} (\epsilon - \bar{Z}_S)^2 \\
B_{\xi\beta} &= \frac{D_{\xi\beta}}{D(1-\nu)} = 1 - \frac{\eta}{S_S R_P} + 2 C_S \frac{(1+D_S \eta)\eta^3}{S_S R_P} \text{ para } \left(\frac{D_S+1}{\eta}\right) \geq 1
\end{aligned}$$

(II.1.9)

ou

$$B_{\xi\beta} = 1 - \frac{\eta}{S_S R_P} + 2C_S \frac{(1+D_S \eta)^3 \eta}{S_S R_P} \quad \text{para } \left( \frac{D_S + 1}{\eta} \right) < 1$$

onde os coeficientes adimensionais para a geometria dos painéis são definidos como,  $\lambda = \ell/R$ ,  $R_P = R/h_P$  e para os enrijecedores,  $\eta = h_S/h_P$ ,  $D_S = d_S/h_S$  e  $S_S = 2\pi/N$ , com as notações indicadas na figura (II.1.1).

O coeficiente  $C_S$  é definido como,

$$C_S = 1 - \frac{192}{\pi^5 d} \sum_{p=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{p^5} \tanh \left( \frac{p\pi}{2} d \right)$$

onde

$$d = \max \left( \frac{1+D_S \eta}{\eta}, \frac{\eta}{1+D_S \eta} \right) \quad (\text{II.1.10})$$

A excentricidade adimensional do enrijecedor,  $\epsilon = e_S/R$  e a correspondente da seção ortotrópica,  $\bar{Z}_S = \bar{z}_S/R$ , são dadas, em função das relações não-dimensionais geométricas, por

$$\begin{aligned} \epsilon &= e_S/R = \frac{1}{2 R_P} (D_S \eta + 1) \\ \bar{Z}_S &= \bar{z}_S/R = \frac{D_S \eta^2 \epsilon}{D_S \eta^2 + S_S R_P} \end{aligned} \quad (\text{II.1.11})$$

Expandindo-se a equação (II.1.6), chega-se a uma equação cúbica em  $\sigma_c$  que, quando resolvida para certos valores de  $n$  e  $p$ , resulta no bem conhecido espectro clássico de tensões.

Formas típicas destes espectros, normalizados com respeito à tensão crítica clássica da casca cilíndrica isotrópica,  $\sigma_{cp} = E h_P/R [3(1-\nu^2)]^{1/2}$ , são mostrados na figura (II.1.3) para a casca isotrópica e na figura (II.1.4) para a casca orto-

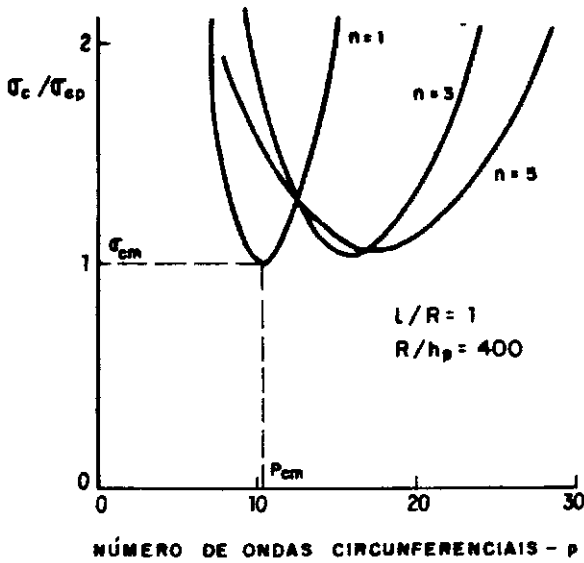


Fig. II.1.3 - Espectro clássico de tensão para o cilindro isotrópico.

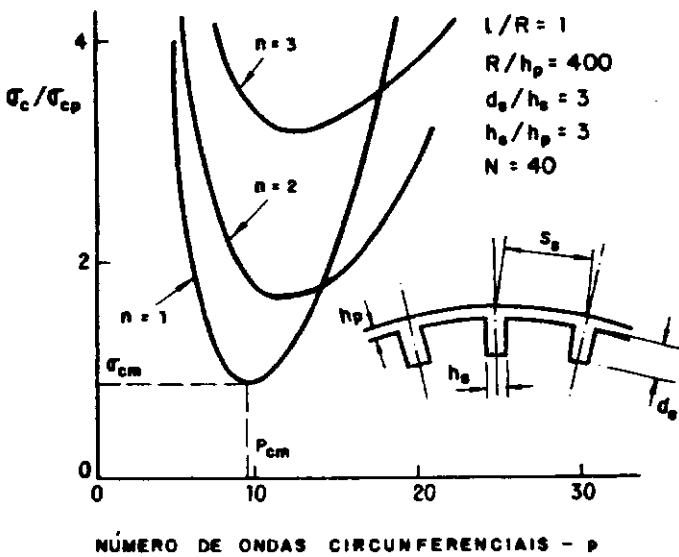


Fig. II.1.4 - Espectro clássico de tensão para o cilindro ortotrópico.



trópica.

Nessas figuras, a geometria das cascas cilíndricas, bem como o nível de enrijecimento adotado no caso ortotrópico, são de uso corrente na engenharia prática.

Com exceção de alguns poucos casos práticos, os cilindros ortotrópicos apresentam usualmente os enrijecedores dispostos internamente à casca; estudos da influência de enrijecedores externos, bem como de distintas condições de contorno, são encontrados na referência [9].

Para o cilindro isotrópico é bem conhecido que as tensões críticas mínimas,  $\sigma_{cm}$ , na figura (II.1.3), ocorrem aproximadamente para o mesmo valor  $\sigma_{cp}$ , para diferentes modos.

Por outro lado, a casca ortotrópica da figura (II.1.4) exibe um único valor mínimo para a tensão crítica,  $\sigma_{cm}$ . Os correspondentes números de ondas críticas são denotadas por  $(n_{cm}, p_{cm})$ . Para este caso particular, a tensão crítica mínima,  $\sigma_{cm}$ , para a casca ortotrópica, é aproximadamente 10% menor que a correspondente  $\sigma_{cp}$  da casca isotrópica. Para o nível de enrijecimento usado neste exemplo, tem-se que a casca ortotrópica apresenta a carga crítica mínima 35% menor que a correspondente ao cilindro isotrópico com espessura equivalente.

Esta redução tem sido explicada [9] pelo enrijecimento que, muitas vezes, pode acrescentar mais termos estabilizantes para a energia potencial total do que estabilizantes.

Como uma extensão de trabalhos anteriores para casca isotrópicas [15,16,21], a referência [9] descreve uma nova filosofia para estimativas de limites inferiores de flambagem elástica global de cilindros ortotrópicos. Entretanto, isto está fora do contexto do presente trabalho, sendo a intenção aqui mostrar, apenas sumariamente, alguns resultados obtidos com a teoria ortotrópica clássica, no que se refere aos efeitos causados pela variação da geometria dos enrijecedores.

### 11.1.2 - Influência da Variação de Parâmetros Geométricos dos Enrijecedores sobre a Carga Crítica

Os efeitos de variações de rigidez extensional e flexural ortotrópicas, sobre os valores da carga crítica, têm sido discutidos em trabalhos anteriores [7, 9].

O efeito causado pelo acréscimo da relação de rigidez extensional ortotrópica,  $A_\xi$ , sobre a forma normalizada de tensão crítica mínima,  $\sigma_{cm}/\sigma_{cp}$ , é mostrada na figura (II.1.5), onde  $A_\xi$  é variado segundo uma escolha apropriada dos parâmetros  $D_s$  e  $\eta$ , tal que a relação de rigidez flexural,  $B_\xi$ , permaneça constante. Os enrijecedores são internos à casca e a relação,  $l/h_p = 400$ , é mantida constante.

Neste caso, incrementando-se  $A_\xi$ , aumenta-se a espessura efetiva do cilindro ortotrópico na mesma proporção e, já que  $B_\xi$  está fixado, pequenos valores de  $A_\xi$  implicam em enrijecedores esbeltos, que podem eventualmente exibir flambagem torsional local para níveis de tensão axial inferiores àqueles associados à flambagem da estrutura ortotrópica.

Neste exemplo, as tensões críticas mínimas ocorrem para valores de  $A_\xi$  em torno de 1.4, para todos os valores de  $l/R$  considerados. O acréscimo de  $A_\xi$  além desta faixa de valores, produz somente pequenas mudanças na razão de tensões críticas mínimas,  $\sigma_{cm}/\sigma_{cp}$ , especialmente para valores crescentes de parâmetro de comprimento,  $l/R$ .

A capacidade de carga da casca ortotrópica é aproximadamente proporcional ao produto  $A_\xi \sigma_{cm}$  e, então, valores suficientemente grandes de  $A_\xi$  implicarão em incrementos na carga crítica axial. Mas, mesmo assim, a capacidade de carga de casca ortotrópica permanecerá, ainda, com valor consideravelmente inferior ao correspondente da casca isotrópica com espessura equivalente.

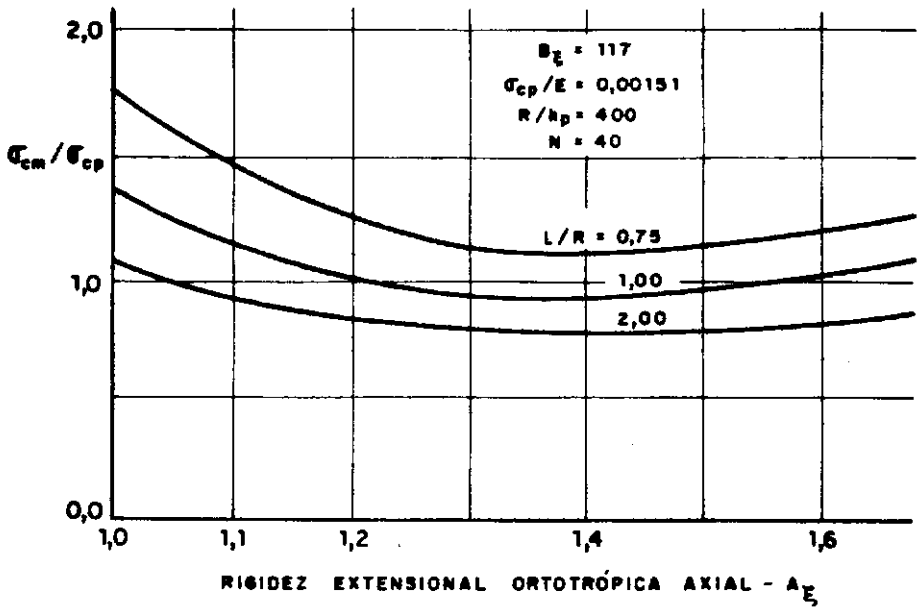


Fig. II.1.5 - Influência da rigidez extensional ortotrópica axial  $A_{\xi}$  na razão de tensão crítica mínima  $\sigma_{cm}/\sigma_{cp}$ .

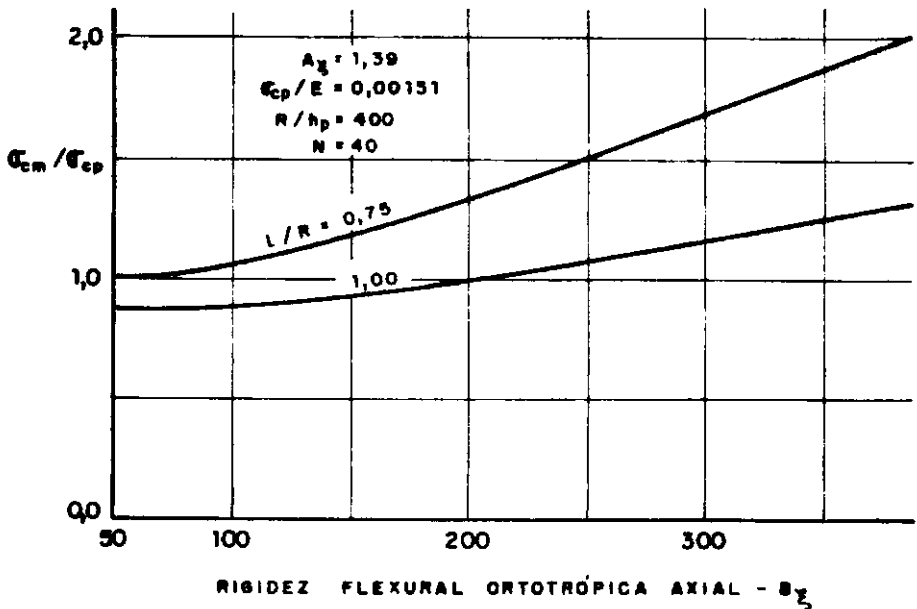


Fig. II.1.6 - Influência da rigidez flexural ortotrópica  $B_{\xi}$  na razão da tensão crítica mínima  $\sigma_{cm}/\sigma_{cp}$ .

A única circunstância em que a adição de enrijecedores parece melhorar substancialmente a eficiência dessas cascas, em comparação com as isotrópicas de espessura equivalente, é quando o valor de  $A_\xi$  se torna bastante pequeno e, consequentemente,  $D_s$  se torna relativamente grande.

Conclusões análogas podem ser tiradas [9], estudando-se a variação de  $B_\xi$ , mantendo-se  $A_\xi$  constante, conforme é ilustrado na figura (II.1.6). Para o exemplo estudado nesta figura, é importante observar que valores de  $B_\xi < 50$  não são considerados, pois implicam em enrijecedores bastante achatados contra a parede da casca e com a tendência de superposição destes elementos.

As constatações anteriores induziriam naturalmente um projetista a adotar enrijecedores bastante esbeltos, na tentativa de melhorar a eficiência estrutural dessas cascas. No entanto, a adoção de enrijecedores esbeltos possibilitaria a ocorrência de interações entre modos de flambagem local (dos enrijecedores) e global de casca ortotrópica.

A análise da estabilidade local de painéis cilíndricos, considerando o efeito da rigidez torsional de enrijecedores esbeltos nos modos de deformação, será apresentada na seção seguinte, para o caso de estruturas geometricamente perfeitas.

## II.2 - ESTABILIDADE LOCAL: ANÁLISE CRÍTICA E PÓS-CRÍTICA

### II.2.1 - Hipóteses Gerais de Análise: Escolha das Funções

#### Deslocamento

A figura (II.2.1) apresenta um painel típico com a disposição dos enrijecedores, geometria e sistema de referência adotados e, no desenvolvimento seguinte, o super-índice (i) denota o i-ésimo painel ou enrijecedor (estes índices serão eventualmente omitidos quando referência for feita isoladamente a um painel típico ou enrijecedor).

As hipóteses gerais para a escolha das funções dos deslocamentos são encontrados na referência [3] e dadas por:

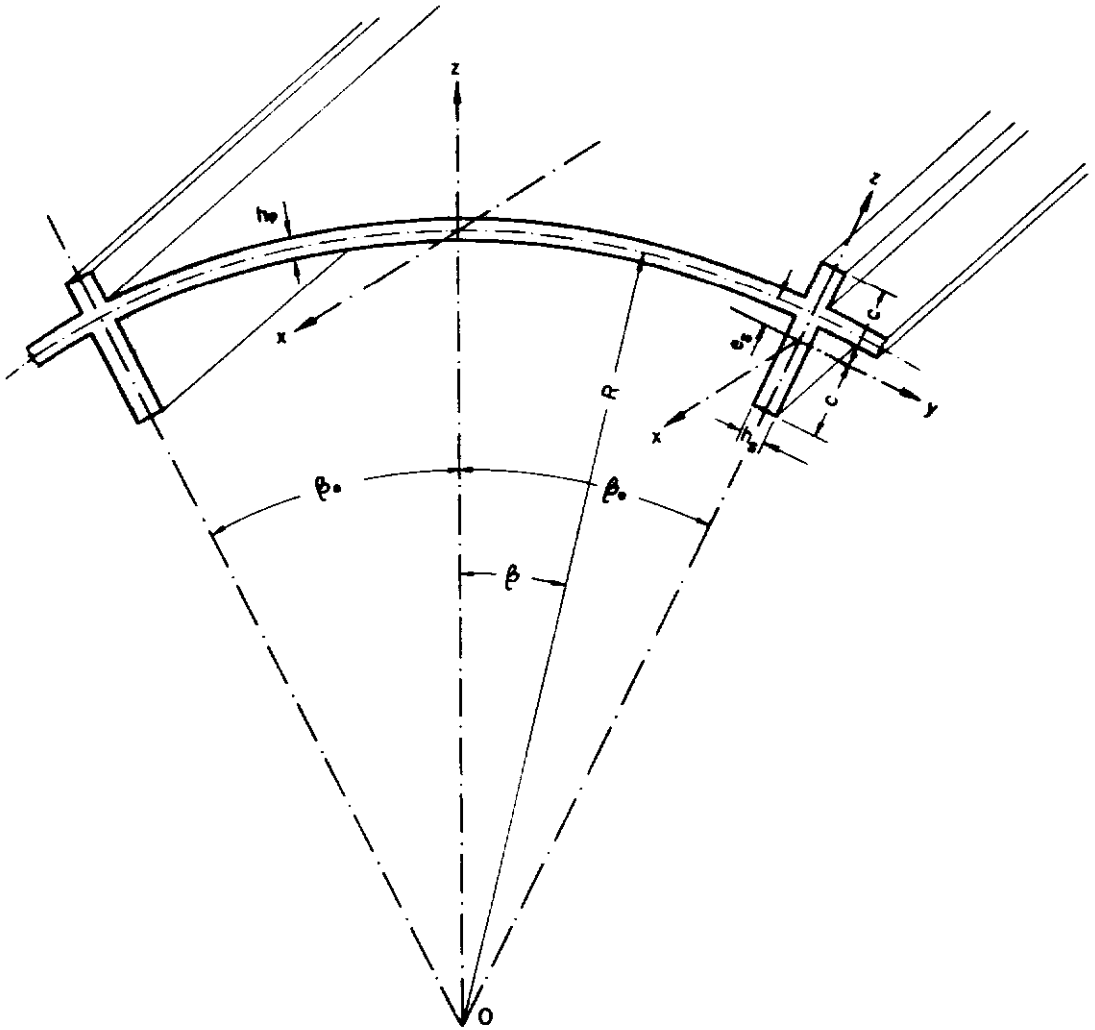
#### A) PAINEL:

$$\begin{aligned} u_p^{(i)}(\xi, \beta) &= u_p^{(i)}(\xi, -\beta) \\ v_p^{(i)}(\xi, \beta) &= -v_p^{(i)}(\xi, -\beta) \\ w_p^{(i)}(\xi, \beta) &= w_p^{(i)}(\xi, -\beta) \end{aligned} \quad (\text{II.2.1})$$

com as relações (II.2.1) expressando a condição de simetria com respeito à geratriz média do painel,  $\beta=0$ .

#### B) ENRIJECEDOR:

$$\begin{aligned} u_s^{(i)}(\xi, \zeta) &= u_p^{(i)}(\xi, \beta_0) - (\zeta - \epsilon) w_p^{(i)'}(\xi, \beta_0) \\ v_s^{(i)}(\xi, \zeta) &= v_p^{(i)}(\xi, \beta_0) - (\zeta - \epsilon) w_p^{(i) \cdot}(\xi, \beta_0) \\ w_s^{(i)}(\xi, \zeta) &= w_p^{(i)}(\xi, \beta_0) (1 + \zeta - \epsilon) \end{aligned} \quad (\text{II.2.2})$$



N enrijecedores e paineis

$$\xi = x/R, \quad \zeta = z/R, \quad \lambda = l/R, \quad \mu = \eta \cdot \delta / \beta_0$$

$$\delta = c/R, \quad \eta = h_s/h_p, \quad \varepsilon = e_s/R, \quad \beta_0 = \pi/N$$

**Fig. II.2.1** - Notação para a geometria do cilindro enrijecido longitudinalmente.

sendo admitida, na escolha das relações (II.2.2), variações lineares em  $\zeta$ , para os deslocamentos no enrijecedor, compatíveis com os deslocamentos na junção painel-enrijecedor.

As relações (II.2.1) e (II.2.2) devem assim atender às relações de compatibilidades seguintes,

$$\begin{aligned}
 u_p^{(i)}(\xi, \beta_0) &= u_s^{(i)}(\xi, \epsilon) = u_p^{(i+1)}(\xi, -\beta_0) \\
 v_p^{(i)}(\xi, \beta_0) &= v_s^{(i)}(\xi, \epsilon) = v_p^{(i+1)}(\xi, -\beta_0) \\
 w_p^{(i)}(\xi, \beta_0) &= w_s^{(i)}(\xi, \epsilon) = w_p^{(i+1)}(\xi, -\beta_0) \\
 w_p^{(i)*}(\xi, \beta_0) &= -v_s^{(i)*}(\xi, \epsilon) = (w_p^{(i+1)})^*(\xi, -\beta_0)
 \end{aligned} \tag{II.2.3}$$

na junção painel-enrijecedor.

### II.2.2 - Funcional de Energia

A energia potencial total do sistema estrutural é descrita por

$$V = \frac{E h_P}{8(1-\nu^2)} \Phi \left[ \underset{\sim}{u}(\phi), \phi \right] \tag{II.2.4}$$

onde

$$\Phi = \sum_{i=1}^N \left( \underset{P}{\phi}^{(i)} + \eta \underset{S}{\phi}^{(i)} \right) \tag{II.2.5}$$

sendo  $\Phi_p^{(i)}$  e  $\Phi_s^{(i)}$ , respectivamente, as contribuições do i-ésimo painel e enrijecedor para o funcional de energia V.

Utilizando as relações não lineares deformação-deslocamento e as relações lineares tensão-deformação constantes do apêndice B (eqs. B.7, B.8 e B.10), as contribuições de energia em (II.2.5) podem, de acordo com os funcionais (B.13) e (B.14) ser escritas como,

$$\begin{aligned} \Phi_p^{(i)} = & \int_0^\lambda d\xi \int_{-\beta_0}^{\beta_0} d\beta \left\{ 4 u'^2 + 4 (v \cdot w)^2 \right. \\ & + 8 v u' (v \cdot w) + 2(1-v)(u \cdot v')^2 \\ & + 4 \alpha [w''^2 + w'^2 + 2 v w'' w' + 2(1-v) w \cdot'^2] \\ & + \frac{4}{R} [ [u' + v(v \cdot w)] w'^2 + (v u' + v \cdot w) w \cdot^2 \\ & \left. + (1-v)(u \cdot v') w' w \cdot ] + \frac{1}{R^2} (w'^2 + w \cdot^2)^2 + 8 R \phi u' \right\}^{(i)}_p \end{aligned} \quad (\text{II.2.6})$$

e

$$\begin{aligned} \Phi_s^{(i)} = & \int_0^\lambda d\xi \int_\gamma^\gamma d\zeta \left\{ 4 u'^2 + 8 w'^2 + 8 v u' w' \right. \\ & + 2(1-v)(u \cdot w')^2 + 4 \alpha \eta^2 [v''^2 + v'^2 \\ & + 2 v u'' v' + 2(1-v) v \cdot'^2] \\ & \left. + \frac{4}{R} [(u' + v w') v'^2 + (v u' + w') v \cdot^2] \right\} \end{aligned} \quad (\text{II.2.7})$$



$$+ (1-\nu)(u^*+w') \left[ v' v^* \right] + \frac{1}{R^2} (v'^2 + v^{*2})$$

$$+ 8 R \phi u' \left. \vphantom{\frac{1}{R^2}} \right\}^{(i)}_s$$

com  $\phi = (1-\nu^2) \sigma/E$  e

$$(\quad)' = \frac{\partial}{\partial \xi} ; \quad (\quad)^* = \frac{\partial}{\partial \beta} ; \quad (\quad)^* = \frac{\partial}{\partial \zeta}$$

### II.2.3 - Caminho de Equilíbrio Fundamental

A solução pré-crítica para o vetor dos deslocamentos  $\underline{u}_0$  é obtida da equação variacional,

$$\delta V [\underline{u}_0(\phi), \phi] = 0 \quad (II.2.8)$$

Esses deslocamentos  $\underline{u}_0$  associados ao caminho fundamental de equilíbrio são adequadamente dados pelas relações lineares,

$$u_{op} = - \xi \phi / (1-\nu^2)$$

$$v_{op} = 0 \quad (II.2.9)$$

$$w_{op} = \nu \phi / (1-\nu^2)$$

para o painel e

$$u_{OS} = - \xi \phi / (1 - v^2)$$

$$v_{OS} = 0 \quad (\text{II.2.10})$$

$$w_{OS} = v \phi (1 + \zeta - \epsilon) / (1 - v^2)$$

para o enrijecedor, as quais definem um estado fundamental de membrana.

#### II.2.4 - Análise de Bifurcação: Estado Crítico de Equilíbrio

Considerando o campo de deslocamento, descrevendo uma configuração vizinha à fundamental, definido pela equação (B.1) no apêndice B e a energia potencial sob a forma expandida (B.4), a condição de estacionaridade no ponto crítico, ou de bifurcação, é expressa pela equação variacional, envolvendo a forma quadrática de  $V$  em termos dos deslocamentos incrementais  $\tilde{u}_1$ ,

$$\delta V_2 (\tilde{u}_1, \phi) = 0 \quad (\text{II.2.11})$$

Esta equação variacional fornece equações diferenciais linearizadas de equilíbrio crítico e, da solução do problema de autovalor resultante, obtém-se o parâmetro de carga crítica,  $\phi_{\min.} = \phi_c$ .

Assume-se na bifurcação, que o vetor dos deslocamentos incrementais  $\tilde{u}_1$  seja anti-simétrico com respeito a cada enrijecedor,

$$\tilde{u}_{1p}^{(i)} (\xi, \beta) = -\tilde{u}_{1p}^{(i+1)} (\xi, \beta) \quad (\text{II.2.12})$$

Esta hipótese, descrita implicitamente por Koiter

[13], é também evidenciada pelos resultados experimentais de Wang e Lin [14].

Usando-se (II.2.12) e as hipóteses gerais da seção (II.2.1), tem-se que

$$u_{1p}^{(i)}(\xi, \beta_0) = w_{1p}^{(i)}(\xi, \beta_0) = 0 \quad (\text{II.2.13})$$

e os modos críticos para o enrijecedor ficam,

$$\begin{aligned} u_{1s}^{(i)} &= 0 \\ v_{1s}^{(i)} &= [v_{1p} - (\zeta - \varepsilon) w_{1p}^*]_{\beta=\beta_0}^{(i)} \\ w_{1s}^{(i)} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.2.14})$$

Assim, para o painel, a solução de bifurcação é tomada na forma [4],

$$\begin{aligned} u_{1p} &= -U_1(\beta) \cos n q \xi \\ v_{1p} &= V_1(\beta) \sin n q \xi \\ w_{1p} &= -W_1(\beta) \sin n q \xi \end{aligned} \quad (\text{II.2.15})$$

e para o enrijecedor,

$$\begin{aligned} u_{1s} &= 0 \\ v_{1s} &= [V_1(\beta_0) + (\zeta - \varepsilon) W_1(\beta_0)] \sin n q \xi \\ w_{1s} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.2.16})$$

As relações (II.2.15) e (II.2.16) satisfazem as condições de contorno de apoio simples em  $\xi=0, \lambda$  e as funções  $U_1(\beta)$ ,  $V_1(\beta)$  e  $W_1(\beta)$  são determinadas pelas condições de compatibilidade na função painel-enrijecedor,  $\beta=\beta_0$ .

Substituindo-se (II.2.15) e (II.2.16) na equação variacional (II.2.11), chega-se a um sistema linear de equações (problema de autovalor) da forma,

$$\underset{\sim}{A} \underset{\sim}{u}_1 = \underset{\sim}{0} \quad (\text{II.2.17})$$

que tem solução não-trivial se, e somente se,

$$\det |\underset{\sim}{A}| = 0 \quad (\text{II.2.18})$$

sendo a carga crítica,  $\phi=\phi_c$ , o menor dos autovalores da matriz  $\underset{\sim}{A}$  na equação (II.2.18). Este desenvolvimento é feito no apêndice C.

#### II.2.5 - Análise Pós-Crítica Inicial

Em uma análise assintótica da estabilidade estrutural [17, 18, 19], assume-se que o caminho pós-crítico,  $\underset{\sim}{u}(\phi)$ , possa ser descrito por expansões em série, em termos de um parâmetro de perturbação  $\hat{\epsilon}$ ,

$$\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{u}_0 + \underset{\sim}{u}_1 \hat{\epsilon} + \underset{\sim}{u}_2 \hat{\epsilon}^2 + \dots \quad (\text{II.2.19})$$

para o vetor dos deslocamentos e

$$\phi = \phi_c + \phi_1 \hat{\epsilon} + \phi_2 \hat{\epsilon}^2 + \dots \quad (\text{II.2.20})$$

para o parâmetro de carga  $\phi$ .

O coeficiente  $\phi_1$  da expansão (II.2.20) é dado por

$$\phi_1 = - \frac{3}{2} \frac{V_3(\underline{u}_1, \phi_c)}{\frac{d}{d\phi} V_2(\underline{u}_1, \phi_c)} \quad (\text{II.2.21})$$

e para o caso de bifurcação simétrica,  $\phi_1=0$ , e o termo seguinte não-nulo da expansão (II.2.20) por

$$\phi_2 = \frac{-2 [V_4(\underline{u}_1, \phi_c) - V_2(\underline{u}_2, \phi_c)]}{\frac{d}{d\phi} V_2(\underline{u}_1, \phi_c)} \quad (\text{II.2.22})$$

onde os funcionais de energia  $V_i$  são apresentados no apêndice B.

Para o cálculo do coeficiente  $\phi_2$ , necessita-se de  $\underline{u}_2$ , obtido (quando  $\phi_1=0$ ) pela equação variacional

$$V_{21}(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \phi_c) = - V_2(\underline{u}_1, \phi_c) \quad (\text{II.2.23})$$

com a condição de  $\underline{u}_2$  ser simétrico com respeito a cada enrijecedor, além de atender às hipóteses gerais da seção (II.2.1).

Como a estrutura analisada tem comportamento pós crítico caracterizado por bifurcação simétrica, a estabilidade de estados pós-críticos iniciais é definida pelo sinal do termo  $\phi_2$  (associado à curvatura do caminho pós-crítico no ponto crítico,  $\phi=\phi_c$ ).

Se  $\phi_2 > 0$ , o estado crítico é de equilíbrio estável e  $\phi > \phi_c$ , para  $\underline{u}_1 \neq 0$ . Por outro lado, se  $\phi_2 < 0$ , o estado crítico é de equilíbrio instável e  $\phi < \phi_c$ , para  $\underline{u}_1 \neq 0$ .

## II.2.6 - Influência de Parâmetros Geométricos sobre a Carga Crítica e sobre a Estabilidade do Estado Crítico de Equilíbrio

Alguns resultados numéricos, para cilindros enrijecidos perfeitos, relatados nas referências [3], são discutidos a seguir.

As cascas analisadas têm enrijecedores bastante espaçados e esbeltos, permitindo assim uma discussão do efeito da rigidez torsional dos enrijecedores sobre a estabilidade local dos painéis cilíndricos.

A figura (II.2.2.a) mostra, para uma casca com as características geométricas indicadas, a influência do parâmetro geométrico de Batdorf,  $Z = \ell^2 (1-\nu^2)^{1/2} / R h_p$ , sobre a carga crítica normalizada,  $\phi_c / \Psi$ , onde  $\phi_c = (1-\nu^2) \sigma_c / E$  e  $\Psi = 2 [\alpha(1-\nu^2)]^{1/2}$ . As curvas são válidas para cilindros com 10 enrijecedores ( $N=10$ ) e com valores fixos das relações  $R/h_p = 113$  e  $c/h_s = 9.4$  e correspondem às características básicas de um modelo experimental relatado nas referências [2,3,4].

Observa-se que os valores mínimos das cargas críticas não variam significativamente com o incremento de  $Z$ , estando estas porém associadas a um número crescente de semi-ondas axiais,  $n$ .

Para valores de  $Z$  elevados, todas as curvas, para diferentes valores de  $n$ , aproximam-se do valor da carga crítica normalizada mínima,  $\phi_c / \Psi = 0.404$ .

A figura (II.2.2.2.b), por sua vez, mostra a variação do parâmetro de curvatura  $\phi_2$  com  $Z$ , para o caso analisado na figura (II.2.2.a). Nota-se que, para valores de  $Z > 1400$  aproximadamente, os valores de  $\phi_2$  tornam-se negativos e, portanto, a estrutura exhibe comportamento instável nos modos considerados.

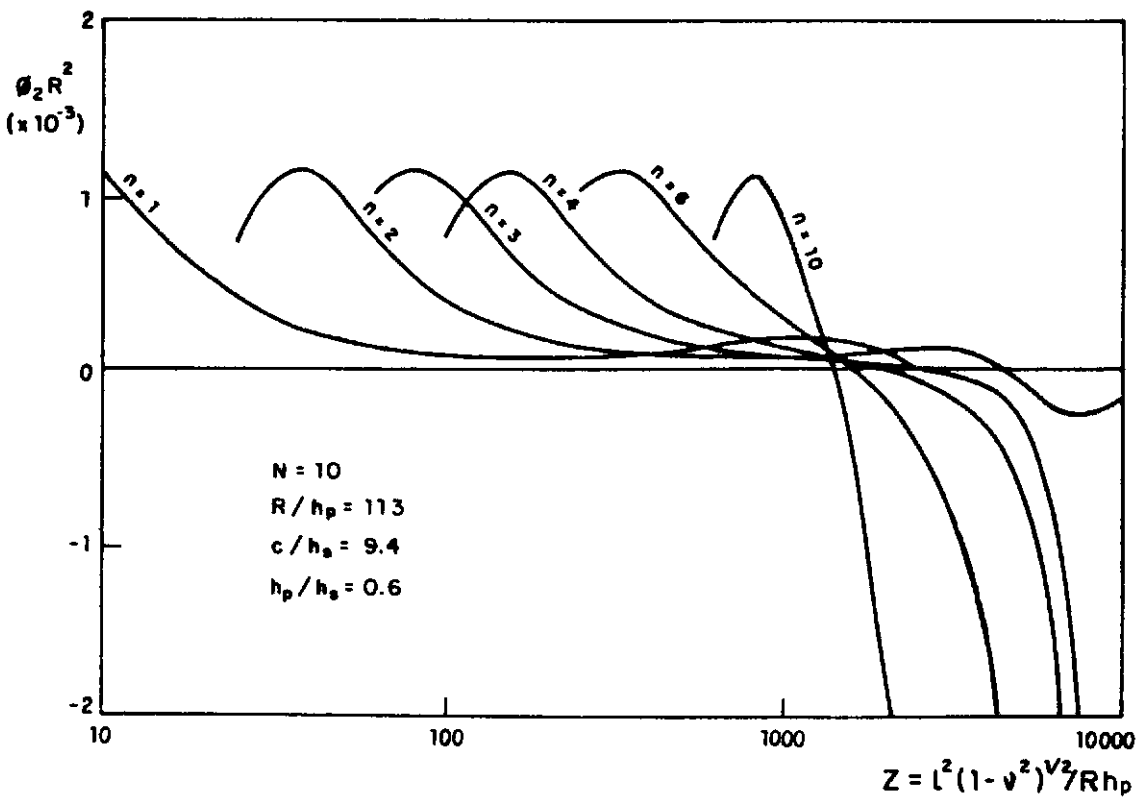
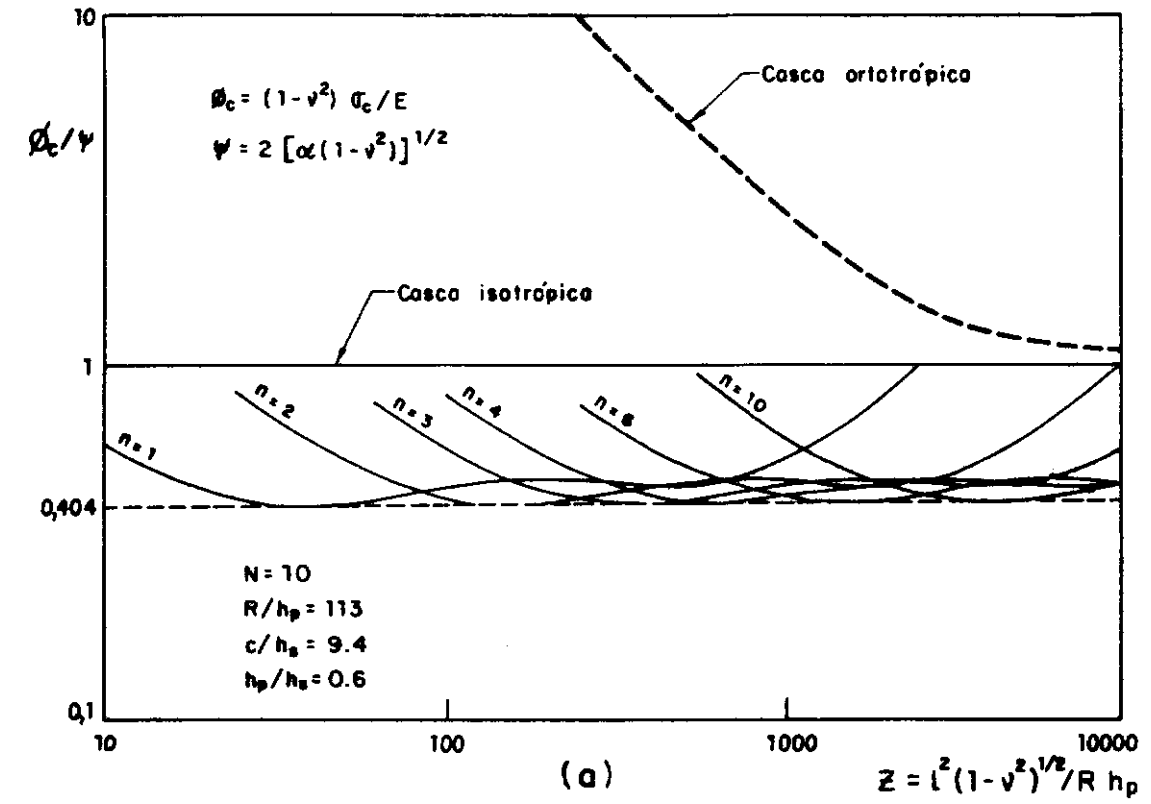


Fig. II.2.2 - Influência do parâmetro geométrico de batdorf  $Z$ :

(a) na carga crítica normalizada,  $\phi_c/\psi$ .

(b) na curvatura pós-crítica inicial,  $\phi_2$ .

Existem, evidentemente, certos intervalos de valores de  $Z$  onde podem ocorrer tanto modos estáveis como instáveis (dependendo da escolha do nº de semi-ondas axiais,  $n$ ), sendo relevante, portanto, um exame para detectar quais modos têm papel predominante no comportamento pós-crítico destes cilindros enrijecidos.

Outros resultados [3] de um estudo paramétrico análogo ao anterior, mas para cascas com 20 enrijecedores ( $N=20$ ) e valores fixos de  $R/h_p = 280$  e  $c/h_s = 8.1$ , são mostrados na figura (II.2.3).

Observa-se na figura (II.2.3.a) que as cargas críticas mínimas obtidas são, novamente, independentes de  $Z$  e se aproximam bastante da carga crítica clássica para cilindros isotrópicos.

Observa-se ainda, com a variação de  $\phi_2$  indicada na figura (II.2.3.b), que todos os modos na vizinhança das cargas críticas mínimas marcados por pontos nessas figuras, têm um certo grau de instabilidade ( $\phi_2 < 0$ ) mesmo para pequenos valores de  $Z$ , tornando-se bastante instáveis para  $Z > 400$ .

O que esses resultados parecem indicar é que, para a geometria e nível de enrijecimento considerados, essas cascas poderiam ter comportamento pós-crítico instável análogo à casca isotrópica [15,16]; isto será discutido mais adiante no capítulo IV.

A figura (II.2.4) mostra a variação da tensão crítica mínima normalizada,  $\phi_c/\psi$ , com o parâmetro adimensional  $\gamma = c/R$ , que define a esbeltez do enrijecedor, para os valores de  $N=10, 20, 30$  e  $40$ , sendo mantidos fixos,  $R/h_p = 280$ ,  $\ell/R = 1.11$  e a área total da seção transversal da casca,  $A_T = 1300 \text{ cm}^2$ .

Para valores de esbeltez do enrijecedor até  $\gamma=0.03$ , o parâmetro crítico de tensão mínima normalizada aumenta para todos os valores de  $N$  considerados. Entretanto, para valores crescentes de  $\gamma > 0.03$ , ocorrem reduções da tensão crítica mínima,



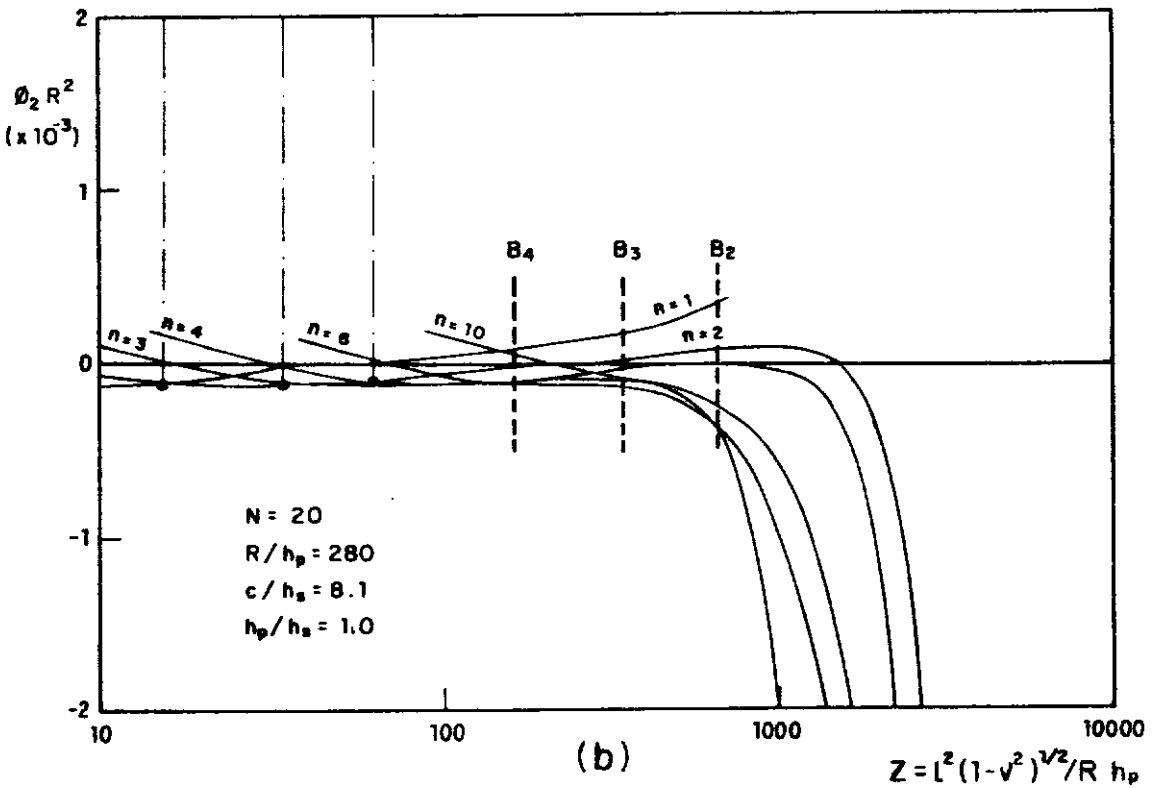
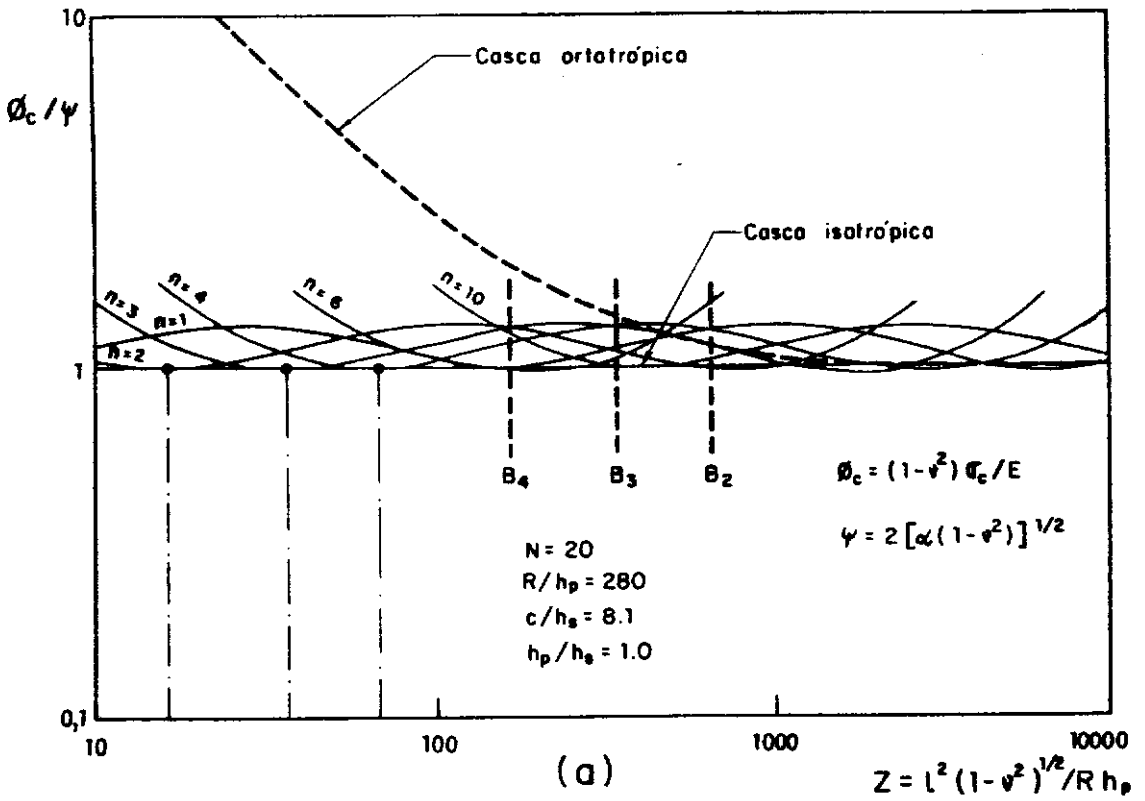


Fig. II.2.3 - Influência do parâmetro geométrico de batdorf  $Z$  :

(a) na carga crítica normalizada  $\phi_c/\psi$

(b) na curvatura pós-crítica inicial  $\phi_2$

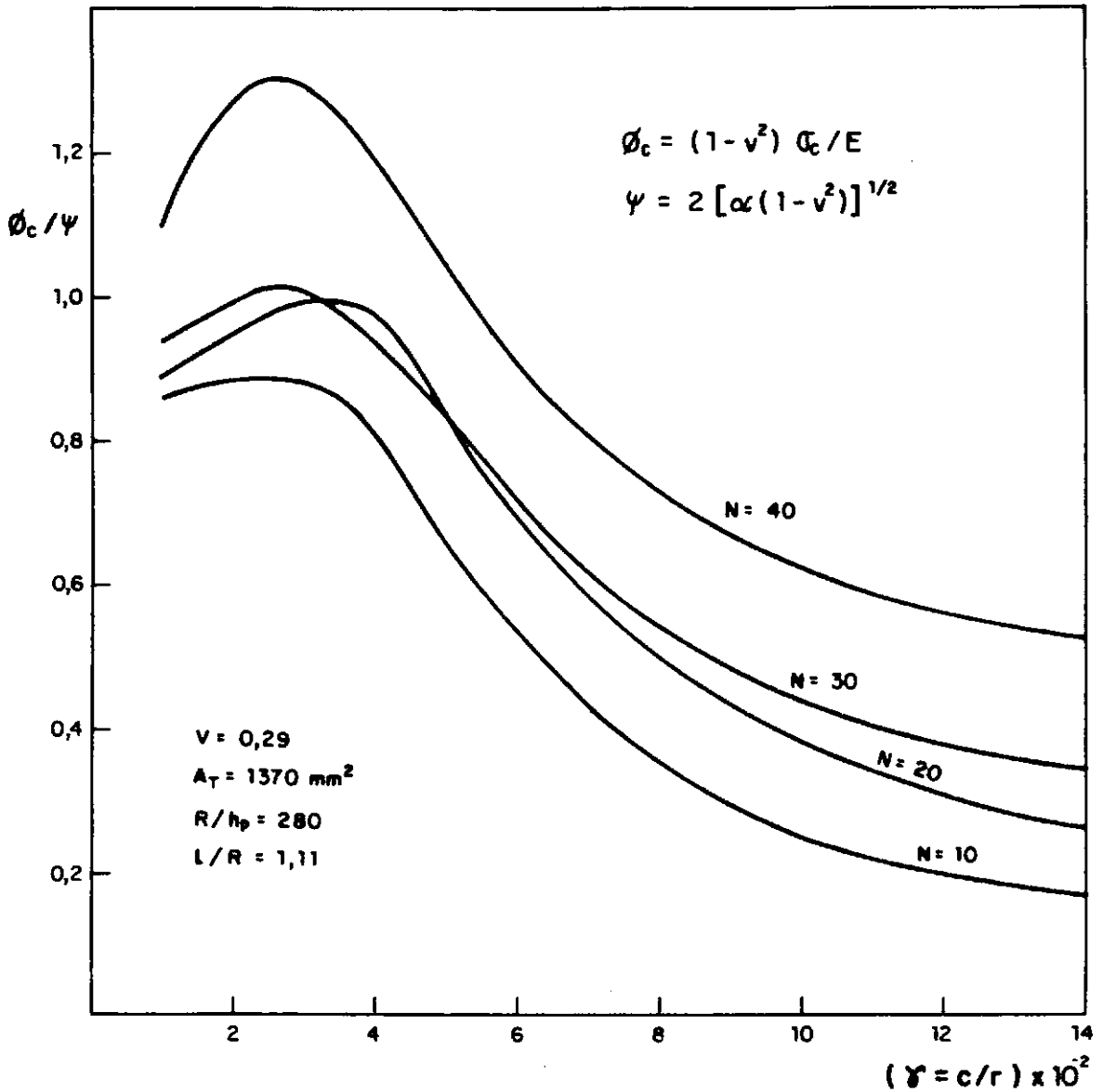


Fig. II.2.4- Influência do parâmetro de esbeltez do enrijecedor sobre a tensão crítica mínima normalizada  $\sigma_c / \psi$ .

sendo estas reduções mais acentuadas para o caso em que  $N = 10$ . Para  $\gamma = 0.12$  e  $N = 10$ ,  $\phi_c$  é reduzida aproximadamente 20% do valor correspondente da tensão crítica clássica,  $\Psi$ , do cilindro isotrópico.

Esta redução da carga crítica, observada com o aumento de esbeltez do enrijecedor, pode ser explicada da seguinte maneira: Quando  $\gamma$  aumenta, o valor  $(h_s/c)^2$  diminui e, portanto, também diminui a tensão crítica torsional do enrijecedor,

$$\sigma_{cs} = \frac{K E h_s^2}{c^2(1-\nu^2)} \quad (\text{sendo } K \text{ definida como na referência [23]}).$$

Assim, nesses casos, o modo torsional do enrijecedor torna-se o fator predominante para a análise da estabilidade desses cilindros.

As análises anteriores indicam que, dependendo da geometria dos painéis e do nível de enrijecimento adotado, as cargas críticas podem ser bastante inferiores à correspondente tensão crítica clássica de casca isotrópica.

Além disso, existe um certo número de cargas críticas bastante próximas e a estabilidade, dos estados crítico e pós-crítico inicial, depende da interação que possa ocorrer entre os modos críticos associados.

Com essa potencialidade de interação entre modos, o comportamento da casca enrijecida poderá ser influenciada por um espectro de imperfeições iniciais na forma desses modos.

A investigação dos efeitos causados pela interação entre modos, incluindo imperfeições iniciais, sobre o comportamento não-linear de cascas enrijecidas por elementos esbeltos e espaçados, será feito nos próximos capítulos.

### CAPÍTULO III

#### ANÁLISE TEÓRICA NÃO-LINEAR DA FLAMBAGEM LOCAL ELÁSTICA DA ESTRUTURA IMPERFEITA

## CAPÍTULO III

ANÁLISE TEÓRICA NÃO-LINEAR DA FLAMBAGEM  
LOCAL ELÁSTICA DA ESTRUTURA IMPERFEITA

## III.1 - CONSIDERAÇÕES INICIAIS E HIPÓTESES ADOTADAS

O presente capítulo apresenta um estudo da interação entre modos de deformação e imperfeições geométricas iniciais, na resposta não-linear elástica de cilindros enrijecidos longitudinalmente, sob carregamento de compressão axial.

Os enrijecedores são esbeltos e bastante espaçados e suas características torsionais constituem fatores predominantes para a análise não-linear da estrutura.

Na figura (II.2.1), do capítulo anterior, estão definidas as características geométricas da estrutura, assim como a localização dos sistemas de referência adotados.

Admite-se, sem grande perda de generalidade, um número par de painéis e enrijecedores. Esta condição de simetria permite que o comportamento da estrutura seja representado por apenas um painel e um enrijecedor, simplificando, assim, a montagem do funcional de energia potencial.

As condições de contorno consideradas são as de apoios simples nas extremidades da casca. Os painéis cilíndricos são tratados segundo a teoria de cascas abatidas [20, 22] e os enrijecedores, como placas delgadas pela teoria de Von-Karman [20]. O material constitutivo tem comportamento elástico linear e a estrutura é considerada livre de tensões iniciais.

Para o painel cilíndrico, as imperfeições geométricas são descritas por desvios radiais  $\bar{w}$ , sendo o deslocamento radial total  $w$  dado pela soma dos deslocamentos da casca  $w_0$ , devido a ação do carregamento, e das imperfeições  $\bar{w}$ ,

$$w = w_0 + \bar{w} \quad (\text{III.1})$$

As deformações que ocorrem para a casca, sob a ação de carga, serão dadas pela diferença entre aquelas associadas ao deslocamento total  $w$ , menos as que serão produzidas pelos deslocamentos  $\bar{w}$ , somente.

Supondo pequenas imperfeições iniciais, os termos não-lineares em  $\bar{w}$  são eliminados da análise. Com isto e com a definição (III.1) para  $w_0$ , as mudanças de curvatura (B.7.d) permanecem inalteradas, sendo as relações deformação-deslocamento de superfície média do painel, incluindo agora imperfeições iniciais, dadas por

$$\begin{aligned} (\varepsilon_\beta)^0 &= v_0^* + w + \frac{1}{2} w_0^{*2} + w_0^* \bar{w} \\ (\varepsilon_\xi)^0 &= u_0' + \frac{1}{2} w_0'^2 + w_0' \bar{w}' \\ (\varepsilon_{\beta\xi})^0 &= \frac{1}{2} \left\{ u_0^* + v_0' + w_0' w_0^* + w_0^* \bar{w}' + w_0^* \bar{w} \right\} \end{aligned} \quad (\text{III.2})$$

Por considerações análogas às do painel, as relações deformação-deslocamento para o enrijecedor, incluindo imperfeições iniciais  $\bar{v}$ , são escritas como

$$\begin{aligned} (\varepsilon_\zeta)^0 &= w_0^* + \frac{1}{2} v_0^{*2} + \bar{v}^* v_0^* \\ (\varepsilon_\xi)^0 &= u_0' + \frac{1}{2} v_0'^2 + \bar{v}' v_0' \\ (\varepsilon_{\zeta\xi})^0 &= \frac{1}{2} \left\{ u_0^* + w_0' + v_0' v_0^* + \bar{v}' v_0^* + \bar{v}^* v_0' \right\} \end{aligned} \quad (\text{III.3})$$

permanecendo inalteradas as relações (B.8.d) do apêndice B para mudanças de curvatura.

### III.2 - FUNCIONAL DE ENERGIA

Descrevendo o campo de deslocamento da estrutura imperfeita por

$$\underline{u} = \underline{u}_0 + \bar{\underline{u}} \quad (\text{III.4})$$

a energia potencial total pode ser escrita como

$$\hat{V}(\underline{u}, \bar{\underline{u}}, \phi) = V(\underline{u}, \phi) + \bar{V}(\underline{u}, \bar{\underline{u}}, \phi) \quad (\text{III.5})$$

onde  $V(\underline{u}, \phi)$  é a energia potencial do sistema perfeito, descrita no apêndice B e  $\bar{V}(\underline{u}, \bar{\underline{u}}, \phi)$  é a contribuição adicional, devida a existência de imperfeições, a qual obedece às condições:

$$\bar{V}(\underline{u}, \underline{0}, \phi) = 0 \quad \text{para todo } \underline{u}$$

$$\bar{V}(\underline{0}, \bar{\underline{u}}, \phi) = 0 \quad \text{para todo } \bar{\underline{u}} \quad (\text{III.6})$$

Este funcional de energia potencial, para o caso estudado da estrutura imperfeita, pode ainda ser escrito como,

$$\begin{aligned} \hat{V}(\underline{u}, \bar{\underline{u}}, \phi) = & \frac{1}{2} \int_0^\lambda \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \left[ \langle \underline{N}_p, \underline{\varepsilon}_p \rangle + \langle \underline{M}_p, \underline{\chi}_p \rangle \right] R^2 d\beta d\xi \\ & + \frac{1}{2} \int_0^\lambda \int_{-\gamma}^{\gamma} \left[ \langle \underline{N}_s, \underline{\varepsilon}_s \rangle + \langle \underline{M}_s, \underline{\chi}_s \rangle \right] R^2 d\zeta d\xi \\ & + K \phi R^2 \left[ \int_0^\lambda \int_{-\beta_0}^{\beta_0} u'_p d\beta d\xi + \eta \int_0^\lambda \int_{-\gamma}^{\gamma} u'_s d\zeta d\xi \right] \end{aligned}$$

$$\text{com } \phi = (1-\nu^2) \sigma/E \text{ e} \quad (\text{III.7})$$

onde os tensores generalizados  $\underline{\varepsilon}$ ,  $\underline{\chi}$ ,  $\underline{N}$  e  $\underline{M}$  não definidos no apêndice B e o símbolo  $\langle , \rangle$  representa o produto interno de tensores. Os subíndices p e s referenciam o painel e o enrijecedor, respectivamente.

Para a montagem do funcional de energia do sistema imperfeito (III.7), serão utilizadas as relações deformação-deslocamento (III.2) e (III.3), as mudanças de curvatura (B.7.d) e (B.8.d) e as relações constitutivas-lineares (B.10) definidas no apêndice B.

### III.3 - ESCOLHA DOS MODOS DE DEFORMAÇÃO E IMPERFEIÇÕES GEOMÉTRICAS INICIAIS

Em trabalhos recentes [2,4], Syngellakis e Walker apresentaram uma solução fundamental não-linear, para cascas enrijecidas imperfeitas, tomando modos de deformação nas formas dos modos clássicos axissimétrico (solução fundamental de membrana, equações (II.2.9) da seção (II.2)) e assimétrico críticos,

$$u_{op} = u_{o1} \xi + u_{o2} \cos n q \xi \cos p \beta$$

$$v_{op} = v_{o2} \sin n q \xi \sin p \beta \quad (\text{III.8.a})$$

$$w_{op} = w_{o1} + w_{o2} \sin n q \xi \cos p \beta$$

para o painel e



$$u_{os} = u_{o1} \xi$$

$$v_{os} = (v_{o2} + b w_{o2}) \sin n q \xi \quad (\text{III.8.b})$$

$$w_{os} = w_{o1} (1 + \zeta - \varepsilon)$$

para o enrijecedor, onde  $b = p(\zeta - \varepsilon)$

As imperfeições geométricas iniciais foram assumidas na forma,

$$\bar{w}_p = a_1 \sin n q \xi \cos p \beta \quad (\text{III.9.a})$$

para o painel e por compatibilidade na junção painel - enrijecedor,  $\beta = \beta_o$

$$\bar{v}_s = a_1 b \sin n q \xi \quad (\text{III.9.b})$$

Mas, com o intuito de investigar as possíveis interações entre modos (comentadas ao final da seção II.2) que podem ocorrer durante as respostas pós-críticas não-lineares dessas estruturas, torna-se necessário adotar funções para deslocamento descritas por modos combinados.

Estudos recentes [15,16,21] têm mostrado, para o caso de cascas cilíndricas isotrópicas, que uma análise não-linear pós-crítica deve incluir necessariamente (além dos modos clássicos) modos axissimétricos com o dobro do número de ondas axiais dos modos clássicos assimétricos. Estes estudos têm demonstrado que a interação, entre esses modos assimétricos e axissimétricos, é responsável pela perda de rigidez durante a resposta não-linear.

Além disso, a ocorrência desses modos axissimétricos -

tricos parece ser evidenciada por algumas poucas e únicas medições experimentais em um cilindro enrijecido (com os enrijecedores esbeltos e bastante espaçados) relatadas na referência [3].

Assim, consideram-se no presente trabalho funções para deslocamentos descritos pelas combinações de modos

$$u_{op} = u_{o1} \xi + u_{o2} \cos n q \xi \cos p \beta + u_{o3} \sin 2 n q \xi$$

$$v_{op} = v_{o2} \sin n q \xi \sin p \beta + v_{o3} \cos 2 n q \xi \quad (\text{III.10.a})$$

$$w_{op} = w_{o1} + w_{o2} \sin n q \xi \cos p \beta + w_{o3} \cos 2 n q \xi$$

para o painel e

$$u_{os} = u_{o1} \xi + u_{o3} \sin 2 n q \xi + 2 (n b q / p) w_{o3} \sin 2 n q \xi$$

$$v_{os} = (v_{o2} + b w_{o2}) \sin n q \xi + v_{o3} \cos 2 n q \xi \quad (\text{III.10.b})$$

$$w_{os} = (w_{o1} + w_{o3} \cos 2 n q \xi)(1 + \zeta - \epsilon)$$

para o enrijecedor. As imperfeições geométricas relevantes são dadas, nas mesmas formas dos modos de deformação, por

$$\bar{w}_p = a_1 \sin n q \xi \cos p \beta + a_2 \cos 2 n q \xi \quad (\text{III.11.a})$$

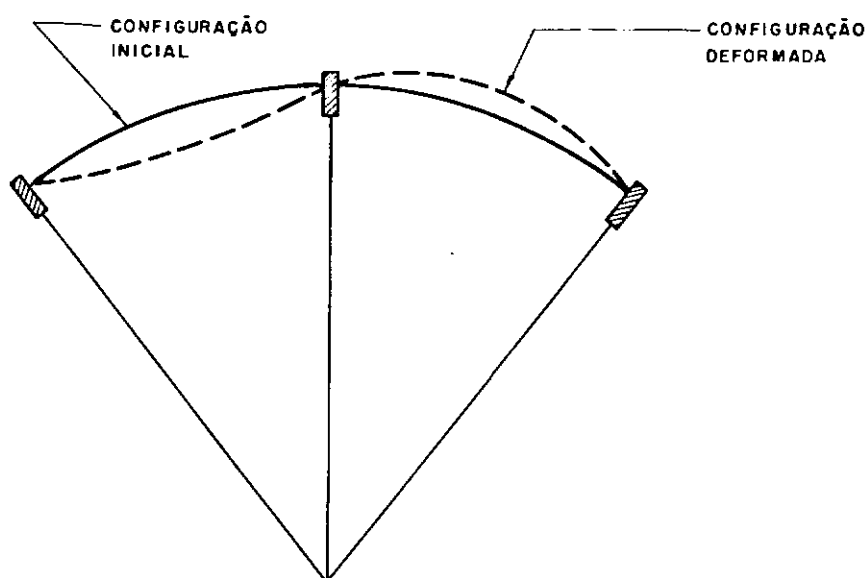
para o painel e por compatibilidade na junção painel - enrijecedor,  $\beta = \beta_0$ ,

$$\bar{v}_s = a_1 b \sin n q \xi \quad (\text{III.11.b})$$

para o enrijecedor.

Algumas considerações importantes podem ser feitas sobre as formas dos modos combinados (III.8) e (III.10):

- a) admite-se que, entre enrijecedores consecutivos, haja apenas uma meia-onda circunferencial ( $p = N/2$ ), como ilustra a figura (III.1);



**Fig. III.1 - Modo de deformação circunferencial.**

- b) o número de semi-ondas axiais  $n$  é arbitrário para os modos assimétricos;
- c) para os modos axissimétricos, o nº de semi-ondas axiais é o dobro do nº de semi-ondas axiais dos modos assimétricos correspondentes;
- d) as imperfeições geométricas iniciais foram consideradas apenas nos modos relevantes ou seja em  $\bar{w}$  (radial), para o painel e em  $\bar{v}$  (modo torsional) para o enrijecedor;

### III.4 - EQUAÇÕES NÃO-LINEARES PARA A ESTRUTURA IMPERFEITA

As possíveis configurações de equilíbrio estático, para qualquer nível de carga  $\phi$  ao longo do caminho fundamental, são obtidas da condição de estacionaridade da energia potencial total

$$\delta \hat{V}(\underline{u}_0, \bar{u}, \phi) = 0 \quad (\text{III.12})$$

Utilizando-se a solução dos modos combinados (III.10), as relações deformação-deslocamento não lineares (III.2) e (III.3), as mudanças de curvatura (B.7.d) e (B.8.d) e as relações constitutivas (B.10) do apêndice B, o funcional de energia (III.7), para a estrutura imperfeita, resulta na expressão:

$$\begin{aligned} \hat{V}(\underline{u}_0, \bar{u}, \phi) = & \frac{1}{2} R^2 K \lambda \beta_0 \left\{ 2(u_{01}^2 + 2v u_{01} w_{01} + w_{01}^2) \right. \\ & + p^2 f(w_{01} + v u_{01}) + n^2 q^2 f(u_{01} + v w_{01}) \\ & + \frac{1}{2} (w_{02} + p v_{02})^2 - v n q u_{02} (w_{02} + p v_{02}) \\ & + \frac{9}{32} (p^4 + n^4 q^4) f^2 + \frac{1}{16} n^2 q^2 p^2 f^2 + \frac{1}{2} n^2 q^2 u_{02}^2 \\ & + \frac{1}{4} (1-v)(-p u_{02} + n q v_{02})^2 + \frac{1}{2} \alpha w_{02}^2 (p^2 + n^2 q^2)^2 \\ & + \mu \left[ 2(u_{01}^2 + 2v u_{01} w_{01} + w_{01}^2) + 2n^2 q^2 (u_{01} + v w_{01}) r_{21} \right. \\ & + \frac{3}{4} p^4 f^2 + 2p^2 (w_{01} + v u_{01}) f + \frac{1}{2} v n^2 q^2 p^2 r_{21} f \\ & \left. + \frac{3}{4} n^4 q^4 \left( \frac{1}{2} v_{02}^4 - s_1 v_{02}^3 f_w + s_2 v_{02}^2 g_w \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 2 s_3 v_{02} g + s_4 f^2) + \frac{1}{8} (1-v) n^2 q^2 p^2 (v_{02}^2 f_w^2 \\
& - 4 s_1 v_{02} g + 4 s_2 f^2) + \eta^2 \alpha \left[ n^2 q^2 (v_{02}^2 - 2 s_1 v_{02} w_{02} \right. \\
& \left. + s_2 w_{02}^2) + 2(1-v) p^2 w_{02}^2 \right] + 4 \phi (1+\mu) u_{01} \\
& + w_{03}^2 - \frac{1}{2} p^2 f w_{03} + 4 n^2 q^2 d_{12} (u_{01} + v w_{01}) \\
& + n^3 q^3 \left[ u_{02} d_{11} + 4 u_{03}^2 + u_{03} f + nq (f d_{12} + d_{11}^2 \right. \\
& \left. + 3 d_{12}^2 + 16 \alpha w_{03}^2) \right] + v nq \left[ 4 u_{03} w_{03} + \frac{1}{2} n q f w_{03} \right. \\
& \left. - nq (w_{02} + p v_{02}) d_{11} + p^2 f (-u_{03} + nq d_{12}) \right] \\
& + \frac{1}{2} (1-v) nq \left[ 4 nq v_{03}^2 + p(-p u_{02} + nq v_{02}) d_{11} \right. \\
& \left. + nq p^2 d_{11}^2 \right] + \mu \left[ w_{03}^2 - p^2 f w_{03} + 4 n^2 q^2 \left[ u_{03}^2 \right. \right. \\
& \left. + v_{03}^2 (u_{01} + v w_{01}) - 4 \frac{nq}{p} s_1 u_{03} w_{03} + \frac{1}{2} nq u_{03} r_{21} \right. \\
& \left. + \frac{n^2 q^2}{p} w_{03} \left( \frac{4}{p} s_2 w_{03} + r_{26} \right) + n^2 q^2 v_{03}^2 \left( \frac{1}{2} r_{21} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{3}{4} v_{03}^2 + \frac{1}{2} v_{02} r_{11} + \frac{1}{2} f_w r_{12} + 4 \eta^2 \alpha \right) \right] \\
& + 4 v nq \left[ u_{03} w_{03} - 2 \frac{nq}{p} s_1 w_{03}^2 + \frac{1}{4} nq r_{21} w_{03} - \frac{1}{2} p^2 f u_{03} \right.
\end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} & + \frac{1}{2} n p q f(2 s_1 w_{o_3} + p v_{o_3}^2) \Big] + (1-v) n^2 q^2 \Big[ \frac{2}{p^2} s_2 w_{o_3}^2 \\ & + w_{o_3} (-s_1 v_{o_2} f_w + 2 s_2 f) + p^2 f_w^2 v_{o_3}^2 \Big] \Bigg\} \quad (\text{III.13})
 \end{aligned}$$

Agora, com a expressão de energia potencial total (III.13), a equação variacional (III.12) fornece um conjunto de 8 equações não-lineares de equilíbrio, tendo como variáveis as amplitudes dos modos combinados (III.10).

Essas equações não-lineares são:

$$\begin{aligned} & u_{o_1} + v w_{o_1} + \frac{1}{4} (n^2 q^2 + v p^2) f + n^2 q^2 d_{12} \\ & + \left[ u_{o_1} + v w_{o_1} + \frac{1}{2} n^2 q^2 r_{21} + \frac{1}{2} v p^2 f + n^2 q^2 v_{o_3}^2 \right] \\ & + \phi (1+\mu) = 0 \quad (\text{III.14.a})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} n q \left[ n q u_{o_2} - v (w_{o_2} + p v_{o_2}) + n^2 q^2 d_{11} \right] \\ & - \frac{1}{8} (1-v) \left[ -p u_{o_2} + n q (v_{o_2} + p d_{11}) \right] = 0 \quad (\text{III.14.b})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& nq \left\{ 2 nq u_{o_3} + \frac{1}{4} n^2 q^2 f + v (w_{o_3} - \frac{1}{4} p^2 f) \right. \\
& + \mu \left[ 2 nq u_{o_3} - 4 \frac{n^2 q^2}{p} s_1 w_{o_3} + \frac{1}{2} n^2 q^2 r_{21} \right. \\
& \left. \left. + v (w_{o_3} - \frac{1}{2} p^2 f) \right] \right\} = 0 \quad (\text{III.14.c})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4} p \left[ w_{o_2} + p v_{o_2} - v nq (u_{o_2} + n q d_{11}) \right] \\
& + \frac{1}{8} (1-v) nq \left[ -p u_{o_2} + nq (v_{o_2} + p d_{11}) \right] \\
& + \mu \left\{ \frac{1}{2} n^2 q^2 r_{11} \left[ u_{o_1} + v w_{o_1} + nq u_{o_3} + 3 n^2 q^2 v_{o_3}^2 \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{2} v (w_{o_3} + \frac{1}{2} p^2 f) \right] + \frac{n^4 q^4}{p} (w_{o_3} r_{12} + \frac{3}{8} p r_{31}) \right. \\
& + \frac{1}{8} (1-v) n^2 q^2 \left[ p^2 (\frac{1}{2} v_{o_2} f_w^2 - s_1 g) + 2 s_1 f_w w_{o_3} \right] \\
& \left. \left. + \frac{1}{2} n^2 \alpha n^4 q^4 (v_{o_2} - s_1 w_{o_2}) \right\} = 0 \quad (\text{III.14.d})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (1-v) n^2 q^2 v_{o_3} + \mu n^2 q^2 \left[ 2 (u_{o_1} + v w_{o_1}) v_{o_3} \right. \\
& \quad \left. + n^2 q^2 v_{o_3} (r_{21} + 3v_{o_3}^2 + v_{o_2} r_{11} + f_w r_{12} + 8 \eta^2 \alpha) \right. \\
& \quad \left. + v p^2 f v_{o_3} + \frac{1}{2} (1-v) p^2 f_w^2 v_{o_3} \right] = 0 \quad (\text{III.14.e})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& w_{o_1} + v u_{o_1} + \frac{1}{4} (p^2 + v n^2 q^2) f + v n^2 q^2 d_{12} \\
& + \mu \left[ u_{o_1} + v u_{o_1} + v n^2 q^2 \left( \frac{1}{2} r_{21} + v_{o_3}^2 \right) + \frac{1}{2} p^2 f \right] = 0 \quad (\text{III.14.f})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4} \left[ -v n q u_{o_2} + p v_{o_2} + w_{o_2} + (w_{o_1} + v u_{o_1}) p^2 f_w \right. \\
& \quad + \frac{1}{16} p^2 (9p^2 + v n^2 q^2) g + \frac{1}{2} (v n^2 q^2 - p^2) f_w w_{o_3} \\
& \quad \left. + n q u_{o_3} f_w (n^2 q^2 - v p^2) \right] + \frac{1}{4} n^2 q^2 \left[ (u_{o_1} + v w_{o_1}) f_w \right. \\
& \quad + \frac{1}{16} (9n^2 q^2 + v p^2) g - v (w_{o_2} + p v_{o_2}) d_{o_2} + d_{12} f_w (n^2 q^2 + v p^2) \\
& \quad \left. + 2 n^2 q^2 d_{11} d_{o_2} - v d_{11} + n q u_{o_2} d_{o_2} \right]
\end{aligned}$$



$$+ \frac{1}{8} (1-\nu) n p q \left[ d_{o_2} (-p u_{o_2} + n q v_{o_2}) + \frac{1}{4} n p q (g + 8 d_{11} d_{o_2}) \right]$$

$$+ \frac{1}{4} \alpha (p^2 + n^2 q^2)^2 w_{o_2} + \mu \left\{ \frac{1}{2} \left[ (w_{o_1} + \nu u_{o_1}) p^2 f_w + \frac{3}{4} p^4 g \right. \right.$$

$$+ \frac{1}{4} \nu n^2 p^2 q^2 (r_{21} f_w + r_{12} f) + n^2 q^2 r_{12} (u_{o_1} + \nu w_{o_1}$$

$$+ n q u_{o_3} + 3 n^2 q^2 v_{o_3}^2 + \frac{1}{2} \nu w_{o_3}) \left. \right] + n^4 q^4 \left( \frac{3}{8} r_{32}$$

$$+ \frac{1}{p} w_{o_3} r_{13} \right) - \frac{1}{2} p^2 f_w (\nu n q u_{o_3} + \frac{1}{2} w_{o_3})$$

$$+ \nu n^2 q^2 p f_w (s_1 w_{o_3} + \frac{1}{2} p v_{o_3}^2)$$

$$+ \frac{1}{8} (1-\nu) n^2 q^2 \left[ 2 w_{o_3} (s_1 v_{o_2} - 2 s_2 f_w) \right.$$

$$+ p^2 (r_{33} + 4 f_w v_{o_3}^2) \left. \right] + n^2 \alpha n^2 q^2 \left[ \frac{1}{2} n^2 q^2 (-s_1 v_{o_2} \right.$$

$$+ s_2 w_{o_2}) + (1-\nu) p^2 w_{o_2} \left. \right] \left. \right\} = 0 \quad (\text{III.14.g})$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} w_{03} + \frac{1}{8} f(v n^2 q^2 - p^2) + v n q u_{03} + 2 n^2 q^2 d_{02} (u_{01} + v w_{01}) \\
& + \frac{1}{2} n^2 q^2 d_{02} f(n^2 q^2 + v p^2) + \frac{1}{2} n^2 q^2 f_w \left[ -v (w_{02} + p v_{02}) \right. \\
& \left. + n q u_{02} \right] + n^4 q^4 \left( \frac{1}{2} d_{11} f_w + 3 d_{12} d_{02} \right) \\
& + \frac{1}{8} (1-v) n p q f_w (-p u_{02} + n q v_{02} + 2 n p q d_{11}) \\
& + 8 \alpha n^4 q^4 w_{03} + \mu \left\{ \frac{1}{2} w_{03} - \frac{1}{4} p^2 f + v n q u_{03} \right. \\
& - 4 \frac{n^2 q^2}{p} s_1 (n q u_{03} + v w_{03}) + \frac{n^4 q^4}{p^2} (8 s_2 w_{03} + p r_{26}) \\
& + v n^2 q^2 (p s_1 f + \frac{1}{4} r_{21}) + \frac{1}{2} (1-v) n^2 q^2 \left[ \frac{2}{p^2} s_2 w_{03} \right. \\
& \left. - \frac{1}{2} (-s_1 v_{02} f_w + 2 s_2 f) \right] \left. \right\} = 0 \tag{III.14.h}
\end{aligned}$$

onde as variáveis, aparecendo nas equações (III.14.a - h), são de finidas no apêndice A.

## CAPÍTULO IV

### COMPORTAMENTO NÃO-LINEAR DA ESTRUTURA IMPERFEITA: ANÁLISE DE RESULTADOS TEÓRICOS

## CAPÍTULO IV

COMPORTAMENTO NÃO-LINEAR DA ESTRUTURA IMPERFEITA: ANÁLISE  
DE RESULTADOS TEÓRICOS

## IV.1 - IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA DE CÁLCULO

As equações não-lineares (III.14) do capítulo anterior foram resolvidas numericamente, com o auxílio do computador Burroughs 6700 do Núcleo de Computação Eletrônica da UFRJ, utilizando-se a linguagem de programação FORTRAN-IV.

A figura (IV.1) ilustra o algoritmo de Newton-Raphson, com incremento de parâmetro de controle de carga ou deslocamento, utilizado na solução do sistema de equações não-lineares (III.14), para a obtenção dos caminhos de equilíbrio para cascas imperfeitas.

Na tabela (IV.1) estão definidas as principais variáveis utilizadas no diagrama de fluxo da figura (IV.1).

## IV.2 - ANÁLISE DOS RESULTADOS TEÓRICOS

Os resultados teóricos, que serão apresentados a seguir, são para as geometrias e características elásticas de cilindros enrijecidos indicados na tabela (IV.2).

Nesta tabela os cilindros tipo B são modelos experimentais de aço de alta resistência e o de tipo A<sub>1</sub> de araldite. A casca C<sub>1</sub> é apenas um modelo idealizado com geometria particular, que se usará mais adiante em uma análise paramétrica.

Os primeiros resultados, ilustrados nas figuras (IV.2) a (IV.4), referem-se ao cilindro de geometria A<sub>1</sub> da tabela (IV.2).

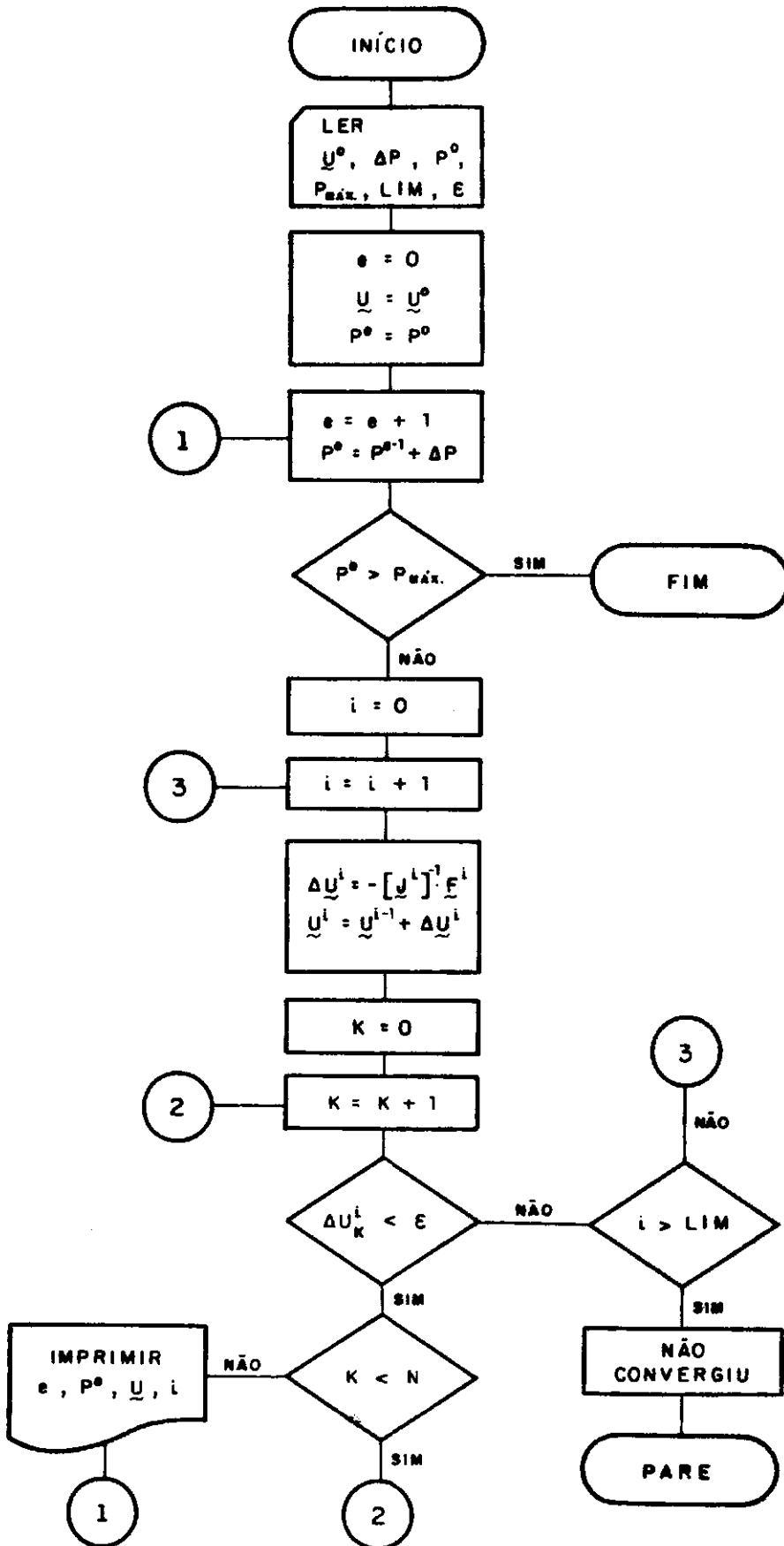


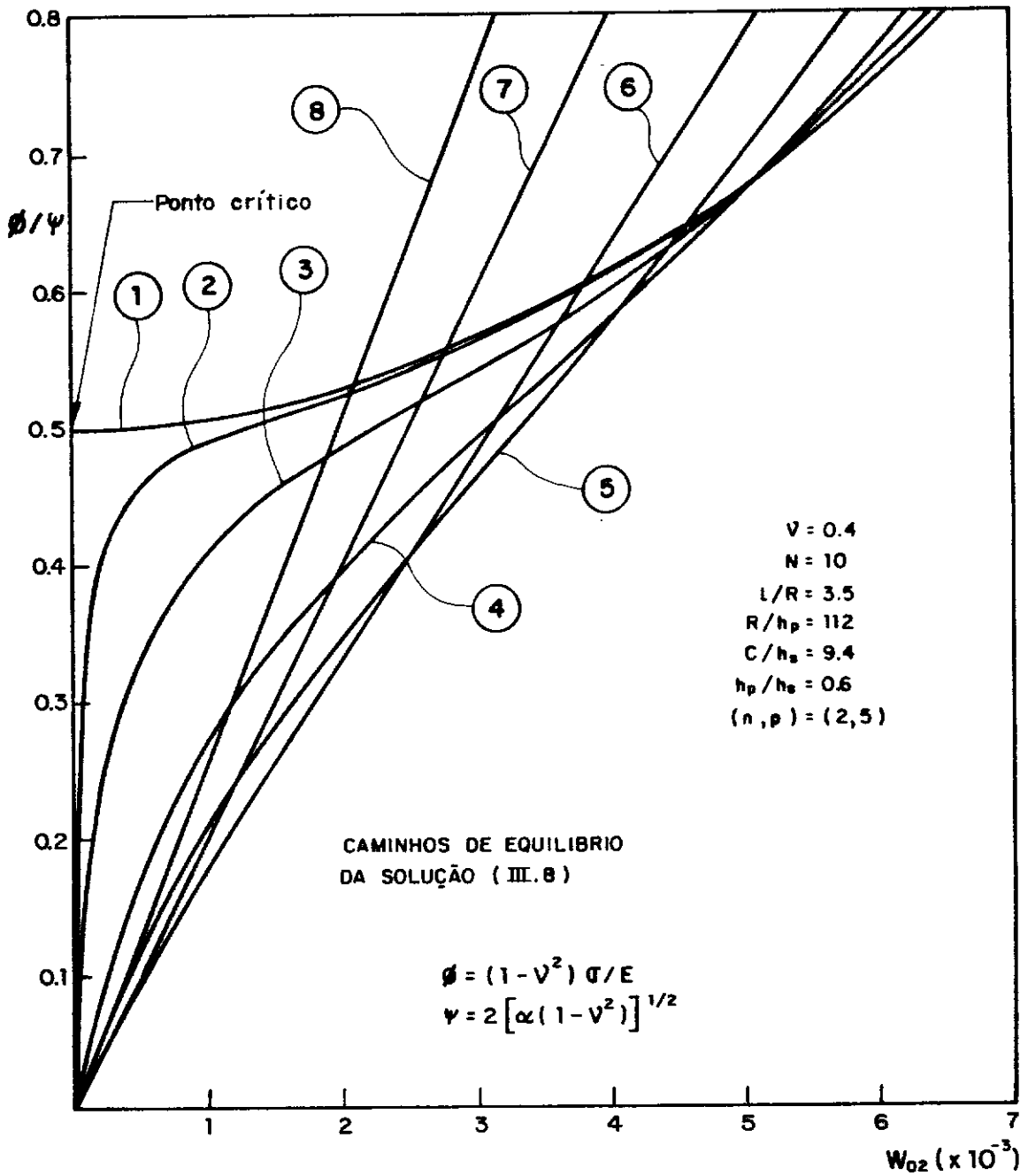
Fig. IV.1 - Diagrama de fluxo para o algoritmo de Newton-Raphson.

TABELA IV.1 - DEFINIÇÃO DAS VARIÁVEIS DO DIAGRAMA DE FLUXO DE NEWTON-RAPHSON DA FIG. (IV.1)

VARIÁVEL	D E F I N I Ç Ã O
$\tilde{F}$	Vetor de Resíduos numa dada Iteração
$\tilde{U}$	Vetor das Incógnitas
$\tilde{J}$	Matriz Jacobiana do Sistema de Equações
$P^e$	Parâmetro de Controle numa Etapa (Carga ou Deslocamento)
$\Delta P$	Valor do Incremento do Parâmetro de Controle P numa Etapa
$P_{\max}$	Valor máximo do Parâmetro de Controle Empregado
$e$	Número da Etapa de Incremento do Parâmetro de Controle P
$i$	Número de Controle das Iterações numa Etapa
LIM	Limite de Iterações numa Etapa
$\tilde{U}^0$	Vetor de Inicialização de $\tilde{U}$
$\Delta \tilde{U}$	Vetor Incremento de $\tilde{U}$ ( $\Delta \tilde{U} = -\tilde{J}^{-1}\tilde{F}$ )
$\epsilon$	Precisão Adotada para a Convergência
$P^0$	Valor Inicial Adotado para o Parâmetro de Controle P
N	Número de Equações Não-Lineares
K	Parâmetro de Controle de Iterações

TABELA (IV.2) - GEOMETRIA E CARACTERÍSTICAS ELÁSTICAS DAS CASCAS  
CILÍNDRICAS ENRIJECIDAS ANALISADAS

IDENTIFICAÇÃO	$R/h_p$	$\ell/R$	$C/h_s$	$h_p/h_s$	N	$h_p$ (mm)	E (KN / mm <sup>2</sup> )	$\nu$
$B_2$ (ref.2)	280.0	1.56	8.1	1.0	20	0.81	210.0	0.3
$B_4$ (ref.2)	280.0	0.76	8.1	1.0	20	0.81	210.0	0.3
$A_1$ (ref.1)	112.0	3.51	9.4	0.6	10	0.62	3.0	0.4
$C_1$	224.0	4.5	10.0	1.0	12	1.0	210.0	0.3



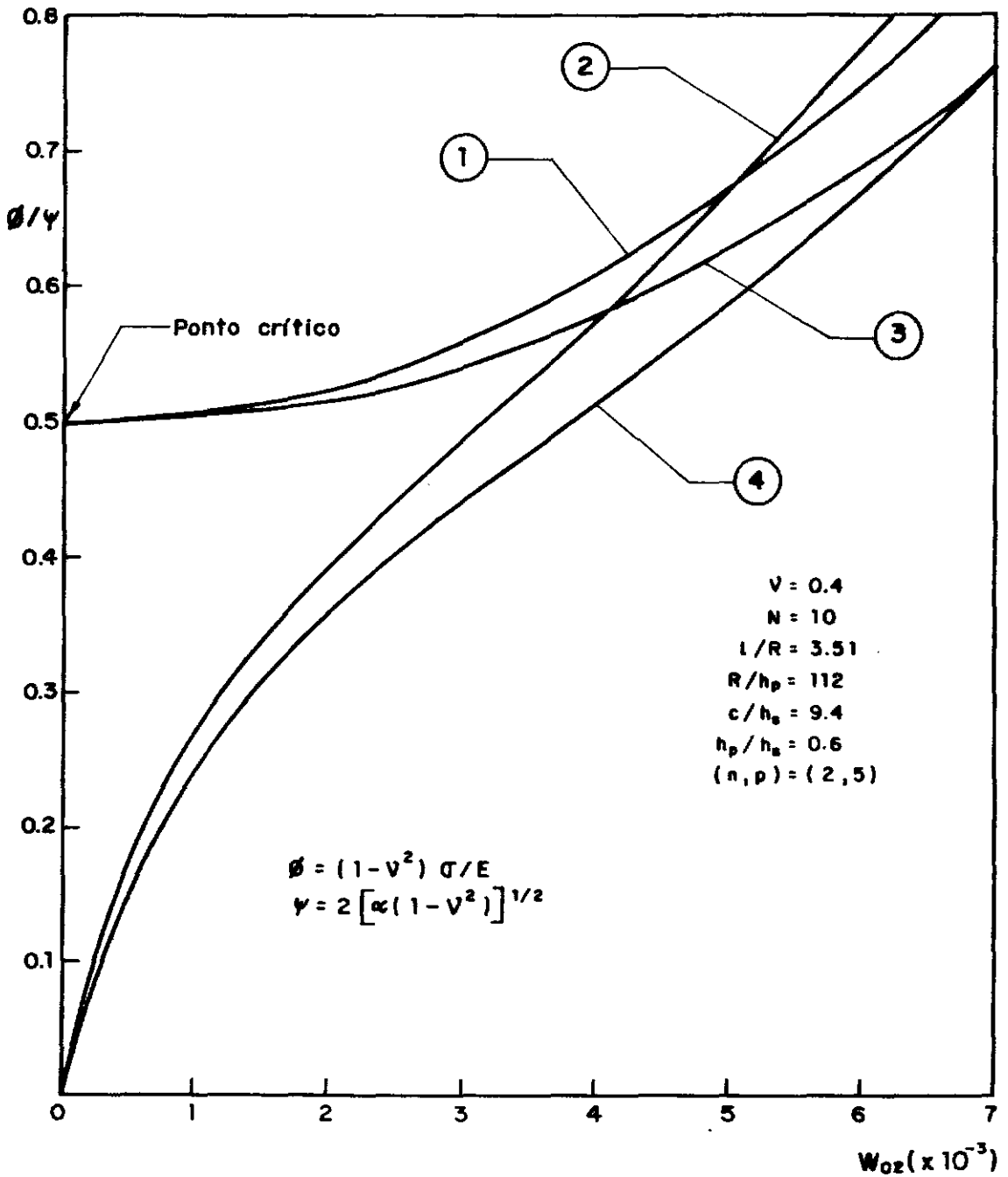
- CURVA 1 -  $\bar{\alpha}_1/h_p = 0$  (PERFEITO)  
 CURVA 2 -  $\bar{\alpha}_1/h_p = 0.006$   
 CURVA 3 -  $\bar{\alpha}_1/h_p = 0.03$   
 CURVA 4 -  $\bar{\alpha}_1/h_p = 0.13$   
 CURVA 5 -  $\bar{\alpha}_1/h_p = 0.26$   
 CURVA 6 -  $\bar{\alpha}_1/h_p = 0.5$   
 CURVA 7 -  $\bar{\alpha}_1/h_p = 1.0$   
 CURVA 8 -  $\bar{\alpha}_1/h_p = 1.5$

Fig. IV.2 - Caminhos não-lineares de equilíbrio. Solução (III.8) da casca  $A_1$ .



Essas figuras mostram a influência da interação, entre modos de deformação e imperfeições iniciais, nas respostas não-lineares para o cilindro imperfeito e a correlação destas com a resposta pós-crítica não-linear para o cilindro perfeito.

A figura (IV.2) mostra projeções dos caminhos não-lineares, associados aos modos assimétricos (III.8), sobre o plano  $(\phi/\Psi) \times w_{02}$ , onde  $\phi/\Psi$  é o parâmetro de tensão normalizada e  $w_{02}$  é a amplitude radial do modo assimétrico. Observa-se que a carga crítica, para o nível de enrijecimento adotado, é apenas 50% da carga crítica clássica da casca isotrópica. Além disso, o caminho perfeito de equilíbrio (curva 1) tem curvatura positiva e, conseqüentemente, exibe um comportamento pós-crítico estável. As demais curvas são para o cilindro imperfeito e correspondem a valores crescentes da amplitude radial  $\bar{a}_1 (=a_1 \times R)$  no modo assimétrico  $w_{02}$ . Quando as amplitudes  $\bar{a}_1$  da imperfeição assimétrica são pequenas, correspondendo às curvas 2, 3 e 4, as projeções do caminho de equilíbrio, neste plano particular, apresentam assintoticidade à curva do caso perfeito (curva 1). No entanto, para amplitudes de imperfeição  $\bar{a}_1$  maiores (curvas 5, 6, 7 e 8), as respostas tornam-se praticamente lineares, mostrando rigidez global crescente com o aumento da amplitude de imperfeição  $\bar{a}_1$ . Isto pode ser explicado pela predominância de efeitos que o enrijecimento tem sobre o comportamento dessas cascas. Nota-se, com a equação de compatibilidade para  $\bar{v}_s$  (eq.(III.9.b) do capítulo III), que imperfeições crescentes no modo assimétrico  $w_{02}$  predizem distorções relativamente grandes na geometria inicial dos enrijecedores. Deste modo, a rigidez estrutural inicial depende essencialmente da energia de deformação torsional dos enrijecedores e esta, por sua vez, depende das mudanças de curvatura, os quais são funções lineares dos deslocamentos. Então, nos casos de amplitudes crescentes de imperfeição no modo assimétrico  $w_{02}$ , seriam naturalmente esperadas relações carga x de flexão aproximadamente lineares.



- CURVA 1 - SOLUÇÃO (III.8),  $\bar{a}_1/h_p = 0$  (PERFEITO)  
 CURVA 2 - SOLUÇÃO (III.8),  $\bar{a}_1/h_p = 0.13$   
 CURVA 3 - SOLUÇÃO (III.10),  $\bar{a}_1/h_p = \bar{a}_2/h_p = 0$  (PERFEITO)  
 CURVA 4 - SOLUÇÃO (III.10),  $\bar{a}_1/h_p = \bar{a}_2/h_p = 0.13$

Fig. IV.3 - Caminhos não-lineares de equilíbrio - geometria da casca A<sub>1</sub>.

As figuras (IV.3) e (IV.4) mostram a influência da interação existente entre os modos assimétricos e axissimétricos, de solução combinada (III.10), sobre a resposta não-linear para o cilindro enrijecido  $A_1$ .

A figura (IV.3) mostra diferenças existentes entre respostas não-lineares obtidas com soluções nas formas (III.10) e (III.8). Nesta figura as curvas nº 1 (caso perfeito) e nº 2 (caso imperfeito) correspondem a soluções (III.8) e as curvas nº 3 (caso perfeito) e nº 4 (caso imperfeito) a solução combinada (III.10).

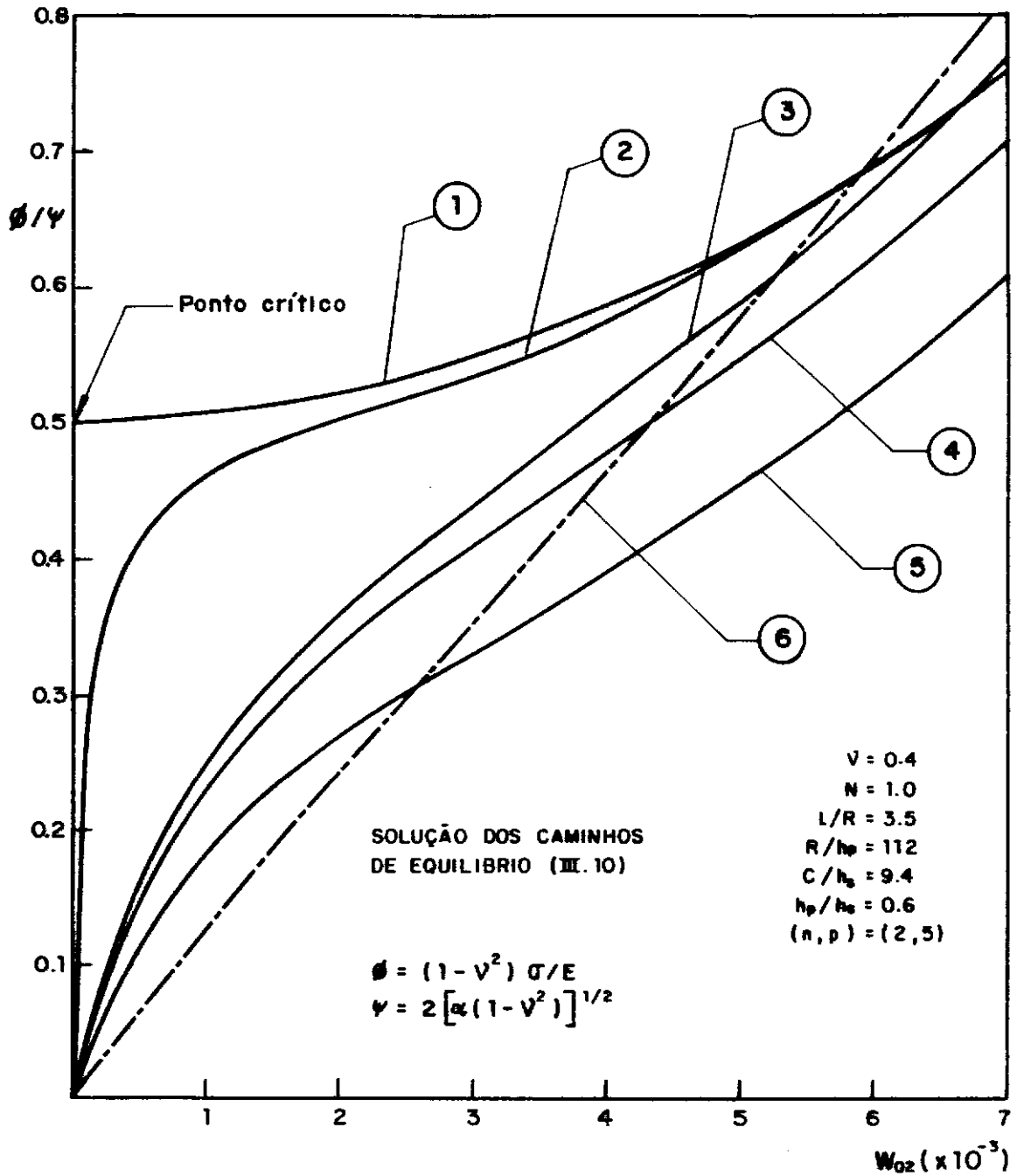
A figura (IV.4), por sua vez, mostra os caminhos de equilíbrio da solução combinada (III.10), correspondentes a vários valores de amplitudes de imperfeições axissimétrica  $\bar{a}_2$  e assimétrica  $\bar{a}_1$ .

Nota-se, como nos casos analisados anteriormente na figura (IV.2), que todas as curvas das figuras (IV.3) e (IV.4) exibem comportamento não-linear estável.

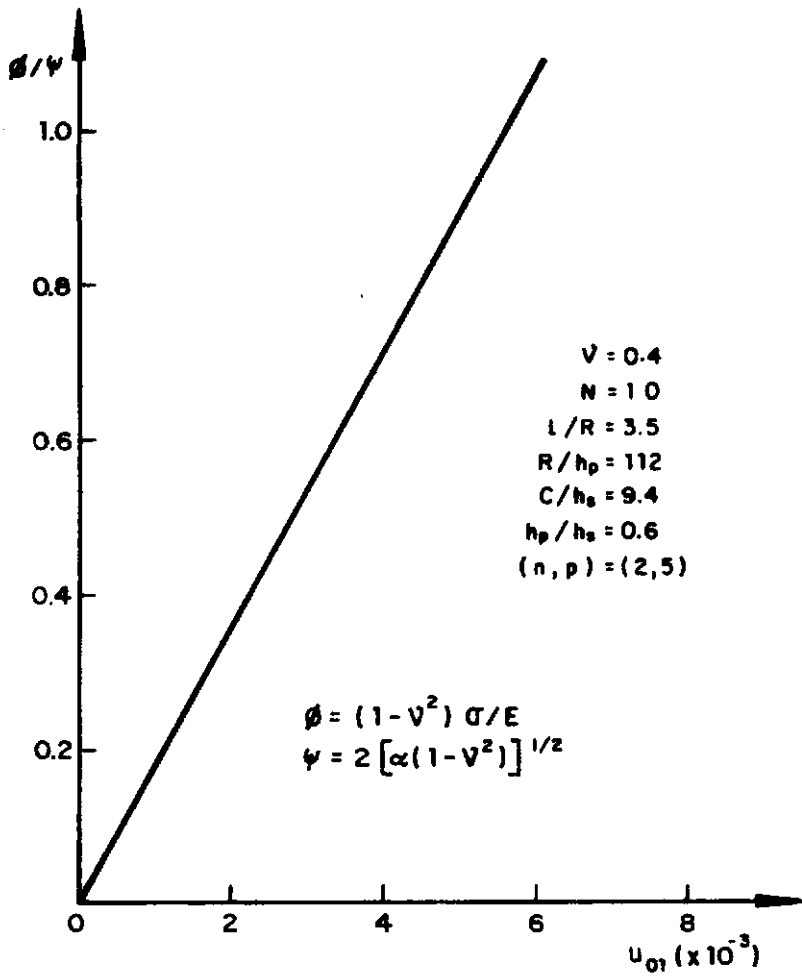
Porém, como mostra com maior clareza a Fig. IV.4, para os modos combinados (III.10), as respostas não-lineares ocorrem com maior perda de rigidez do que aquelas associadas à solução assimétrica (III.8), desde que sejam admitidos acréscimos de imperfeições consideráveis apenas no modo axissimétrico  $w_{03}$ .

Por outro lado, se as amplitudes do modo assimétrico  $w_{02}$  são acrescidas, o comportamento exibido é quase linear e idêntico àqueles observados anteriormente na figura (IV.2); isto é ilustrado na figura (IV.4) pela curva traço-ponto nº 6.

O que fica claro com as figuras (IV.3) e (IV.4) é a importância da inclusão dos modos axissimétricos ( $u_{03}$ ,  $v_{03}$ ,  $w_{03}$ ) em (III.10) para representar o comportamento não-linear das cascas.



**Fig. IV.4 - Caminhos de equilíbrio. Solução (II.10) para a geometria da casca A<sub>1</sub>.**



**Fig. IV.5** - Projeção no plano  $(\phi/\psi \times u_{01})$  dos caminhos de equilíbrio - geometria da casca  $A_1$ .

Com o incremento da amplitude de imperfeição radial axissimétrica  $\bar{a}_2 (=a_2 \times R)$  na figura (IV.4), a rigidez estrutural diminui em estágios iniciais de deformação sob carga crescente. Para amplitudes dessa imperfeição de ordem da espessura da casca ( $\bar{a}_2 = h_p$ ), a curva nº 5 mostra que esta redução inicial é substancial.

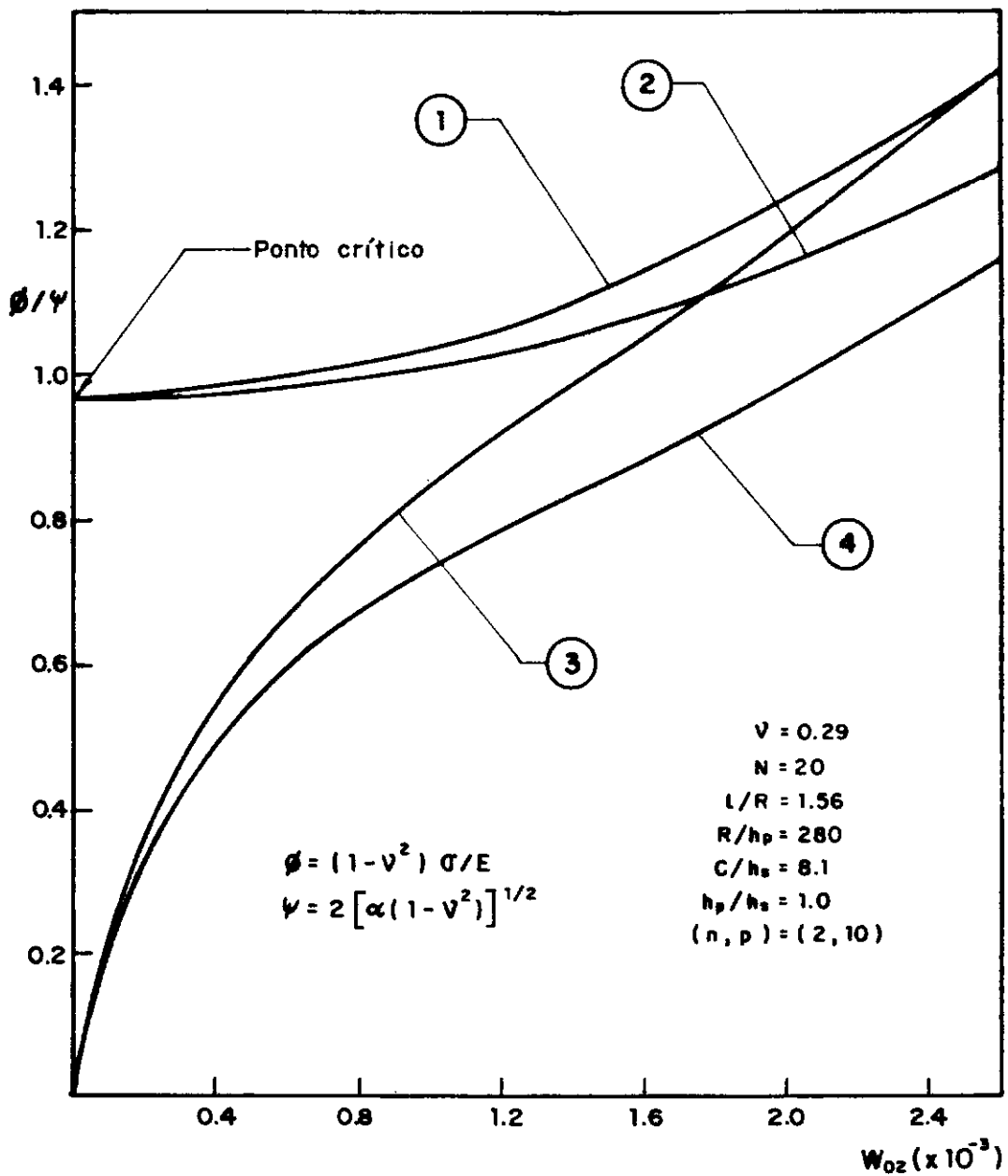
A figura (IV.5) mostra as projeções dos mesmos caminhos de equilíbrio das figuras (IV.3) e (IV.4) sobre o plano  $(\phi/\psi) \times u_{01}$ , onde  $u_{01}$  é o encurtamento axial adimensional. Observa-se que todas as curvas são coincidentes e, portanto, sobre este plano particular, a resposta não-linear é independente da interação entre modos e imperfeições geométricas iniciais, exibindo um comportamento linear bem definido.

Estudos análogos foram feitos também para os cilindros enrijecidos tipos B (tabela (IV.2)) e os resultados obtidos são apresentados nas figuras (IV.6) e (IV.7). Essas figuras mostram as respostas não-lineares destes cilindros sobre o plano particular  $(\phi/\psi) \times w_{02}$ .

Observa-se novamente nesses casos um comportamento não-linear estável. Mas as interações existentes entre modos e imperfeições geométricas iniciais, de solução combinada (III.10) produzem respostas não-lineares que, em relação àquelas correspondentes a solução assimétrica (III.8), apresentam um menor ganho de rigidez. Este tipo de comportamento é menos acentuado no caso da casca mais curta (B.4 da figura (IV.7)), a qual tem carga crítica superior à clássica para o cilindro isotrópico.

A diferença existente entre as respostas das soluções (III.8) e (III.10) aumenta consideravelmente com o aumento de amplitude radial do modo assimétrico  $w_{02}$ , comportamento este também observado na geometria tipo  $A_1$ , estudada anteriormente.

Com a finalidade de avaliar se a imposição analítica de modos circunferenciais, contendo apenas uma meia-onda entre enrijecedores, tem efeito restritivo sobre o comportamen-



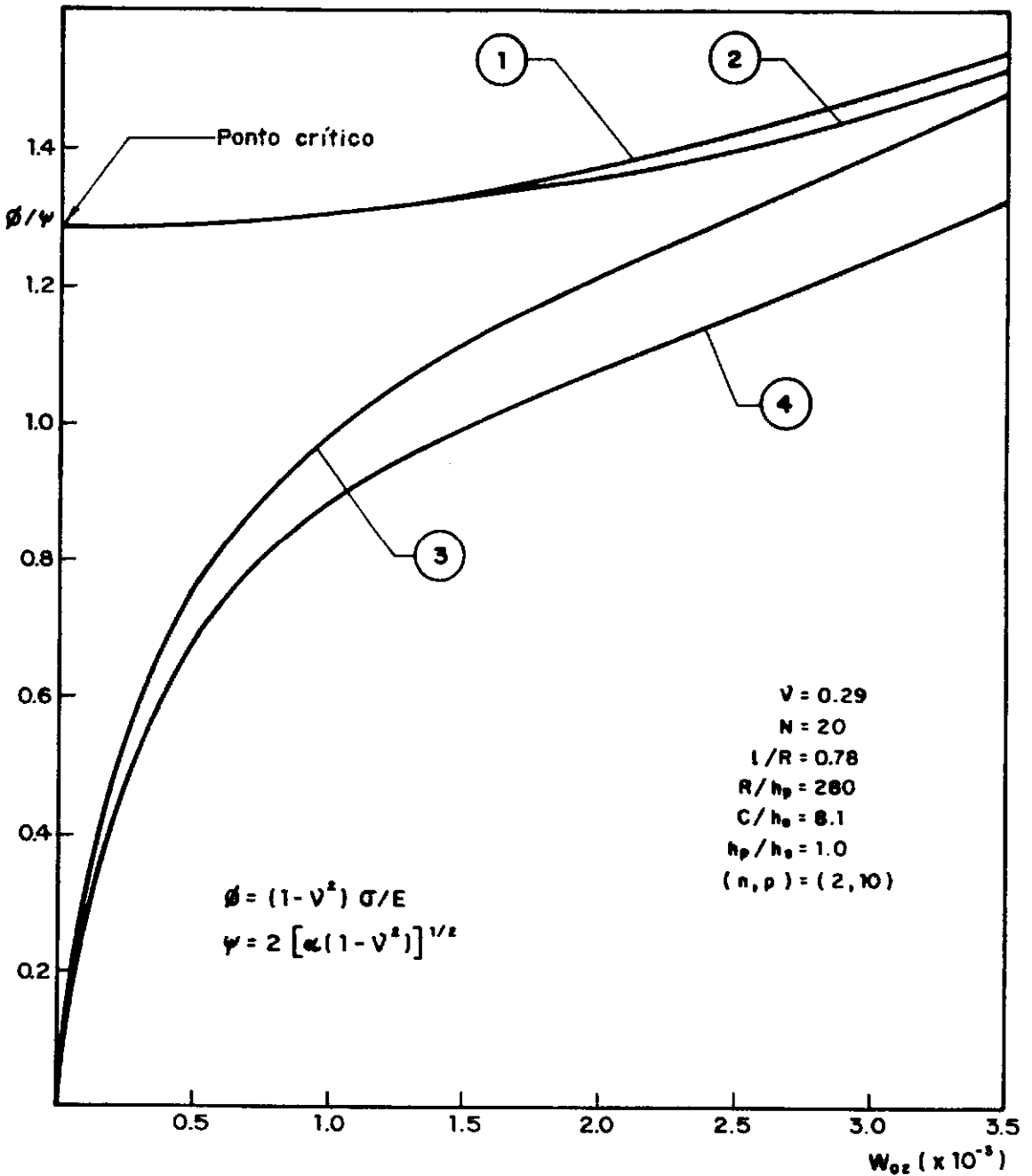
CURVA 1 - SOLUÇÃO (III.8),  $\bar{\alpha}_1/h_p = 0$  (PERFEITO)

CURVA 2 - SOLUÇÃO (III.10),  $\bar{\alpha}_1/h_p = 0$  (PERFEITO)

CURVA 3 - SOLUÇÃO (III.8),  $\bar{\alpha}_1/h_p = 0.1$

CURVA 4 - SOLUÇÃO (III.10),  $\bar{\alpha}_1/h_p = \bar{\alpha}_2/h_p = 0.1$

Fig. IV. 6 - Caminhos não-lineares de equilíbrio - geometria da casca  $B_2$ .



- CURVA 1 - SOLUÇÃO (III.8),  $\bar{\delta}_1/h_p = 0$  (PERFEITO)  
 CURVA 2 - SOLUÇÃO (III.10),  $\bar{\delta}_1/h_p = \bar{\delta}_2/h_p = 0$  (PERFEITO)  
 CURVA 3 - SOLUÇÃO (III.8),  $\bar{\delta}_1/h_p = 0.1$   
 CURVA 4 - SOLUÇÃO (III.10),  $\bar{\delta}_1/h_p = \bar{\delta}_2/h_p = 0.1$

Fig. IV.7 - Caminhos não-lineares de equilíbrio - geometria da casca  $B_4$ .



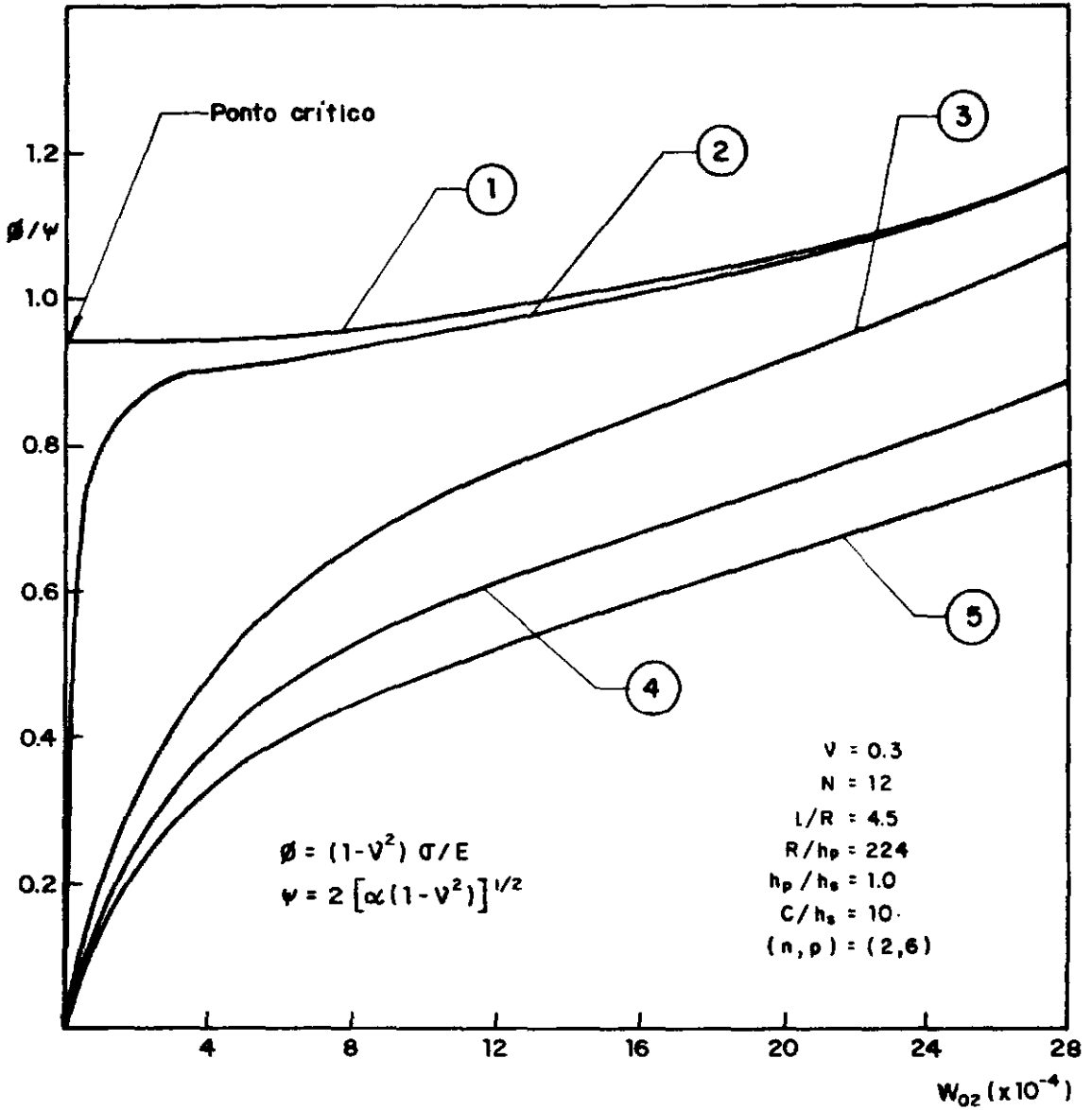
to pós-crítico da casca, analisa-se a seguir o modelo particular  $C_1$  da tabela (IV.2).

A geometria deste modelo é tal que o número de enrijecedores é igual ao dobro do número de ondas circunferenciais críticas, obtidas com a casca isotrópica (isto é, sem enrijecedores), associadas a duas meias-ondas axiais ( $n=2$ ) e a carga crítica mínima. Neste caso particular, a locação dos enrijecedores coincide com os nós do modo crítico circunferencial e a adoção na análise teórica de uma meia-onda entre enrijecedores não implica, então, em nenhuma imposição modal severa.

A figura (IV.8) mostra os comportamentos estáveis para os casos perfeitos e imperfeitos do modelo de casca enrijecida  $C_1$ ; nota-se que o acréscimo de imperfeições no modo axissimétrico causa neste modelo acentuada perda de rigidez inicial. Mas o que deve ser aqui enfatizado é a mudança de comportamento pós-crítico: é bem sabido que esta casca, se isotrópica (sem enrijecedores), teria comportamento instável, caracterizado por rigidez negativa, mas a inclusão dos enrijecedores mesmo que bastante esbeltos - causam, sem imposição modal severa, uma inversão de comportamento para estável, caracterizado por ganho de rigidez em estágios avançados de deformação.

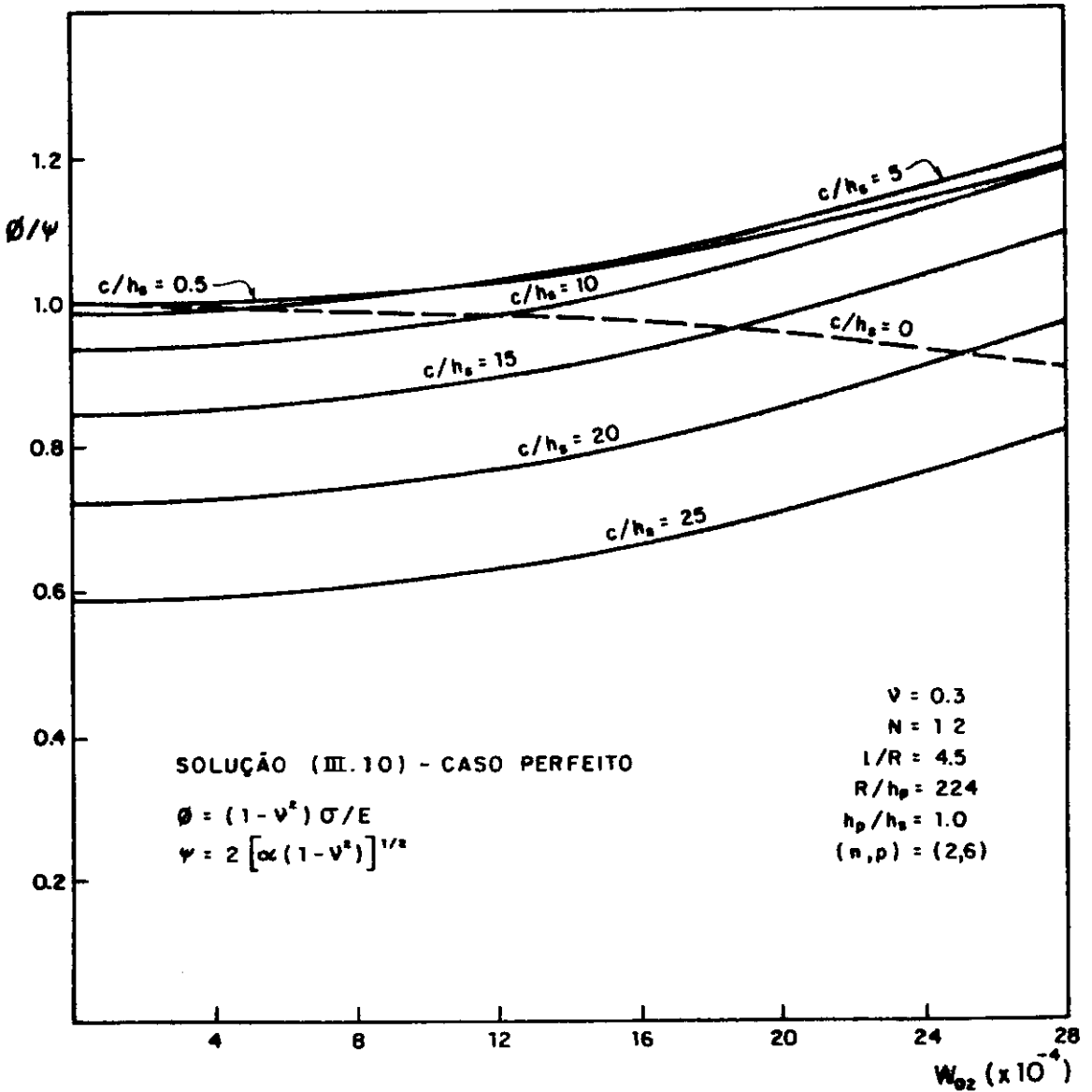
A influência de variação do nível de enrijecimento, sobre a carga crítica e estabilidade pós-crítica, é mostrada na figura (IV.9), para a geometria da casca  $C_1$ . Observa-se que o aumento de largura dos enrijecedores ( $C/h_s$  crescente) provoca reduções substanciais da carga crítica, muito embora a estabilidade de estados críticos e pós-críticos (associada à curvatura dos caminhos de equilíbrio) permaneça praticamente inalterada.

Estas reduções de carga crítica são devidos ao grande espaçamento entre enrijecedores, cujas características torsionais influenciam sobremaneira a capacidade de carga e o comportamento estrutural dessas cascas; isto foi discutido anteriormente na seção (II.2).



- CURVA 1 -  $\bar{a}_1/h_p = 0$  ,  $\bar{a}_2/h_p = 0$  (PERFEITO)  
 CURVA 2 -  $\bar{a}_1/h_p = 0.004$  ,  $\bar{a}_2/h_p = 0.004$   
 CURVA 3 -  $\bar{a}_1/h_p = 0.08$  ,  $\bar{a}_2/h_p = 0.08$   
 CURVA 4 -  $\bar{a}_1/h_p = 0.08$  ,  $\bar{a}_2/h_p = 0.5$   
 CURVA 5 -  $\bar{a}_1/h_p = 0.08$  ,  $\bar{a}_2/h_p = 1.0$

**Fig. IV.8** - Caminhos não-lineares de equilíbrio. Solução (III.10) para a geometria da casca  $C_1$ .



**Fig. IV.9** - Caminhos de equilíbrio. Solução (III.10) para vários valores da relação de esbeltez do enrijecedor  $c/h_s$ , para a geometria da casca  $C_1$ .

Pode-se observar ainda que a diminuição de enrijecimento ( $C/h_s$  decrescente) produz acréscimo de carga crítica para valores que tendem à carga crítica clássica de casca isotrópica. Nestes casos de níveis de enrijecimento bastante pequenos, o grau de estabilidade (dado pela curvatura da resposta no ponto crítico) sofre também alguma redução. No caso limite, quando  $C/h_s \rightarrow 0$ , a casca se torna isotrópica e seu comportamento pós crítico não-linear é instável, sendo isto ilustrado na figura (IV.9) pela curva tracejada.

## CAPÍTULO V

### O PROBLEMA DA BIFURCAÇÃO SECUNDÁRIA

## V - O PROBLEMA DA BIFURCAÇÃO SECUNDÁRIA

### V.1 - Condição de Equilíbrio Crítico

O campo de deslocamento na bifurcação é assumido na forma incremental,

$$\underline{u} = \underline{u}_0 + \underline{u}_1 \quad (V.1)$$

onde  $\underline{u}_0$  é uma das soluções (III.8) ou (III.10) de caminho fundamental imperfeito, obtido das equações (III.14) e  $\underline{u}_1$  é agora a forma de solução admissível para a bifurcação, a qual satisfaz as condições de contorno e de compatibilidade de deslocamentos.

A energia potencial total na forma expandida, em termos do campo incremental de deslocamentos  $\underline{u}_1$ , pode ser escrita com (III.5) na forma análoga a expansão (B.11)

$$\begin{aligned} \hat{V}(\underline{u}_0 + \underline{u}_1, \phi) &= \hat{V}_0(\underline{u}_0, \phi) + \hat{V}_1(\underline{u}_1, \phi) \\ &+ \hat{V}_2(\underline{u}_1, \phi) + \dots \end{aligned} \quad (V.2)$$

onde cada parcela  $\hat{V}_i(\underline{u}_1, \phi)$  contém todos os termos de  $i$ -ésimo grau em  $\underline{u}_1$ .

A condição de estacionaridade no ponto crítico ou de bifurcação é expressa pela equação variacional,

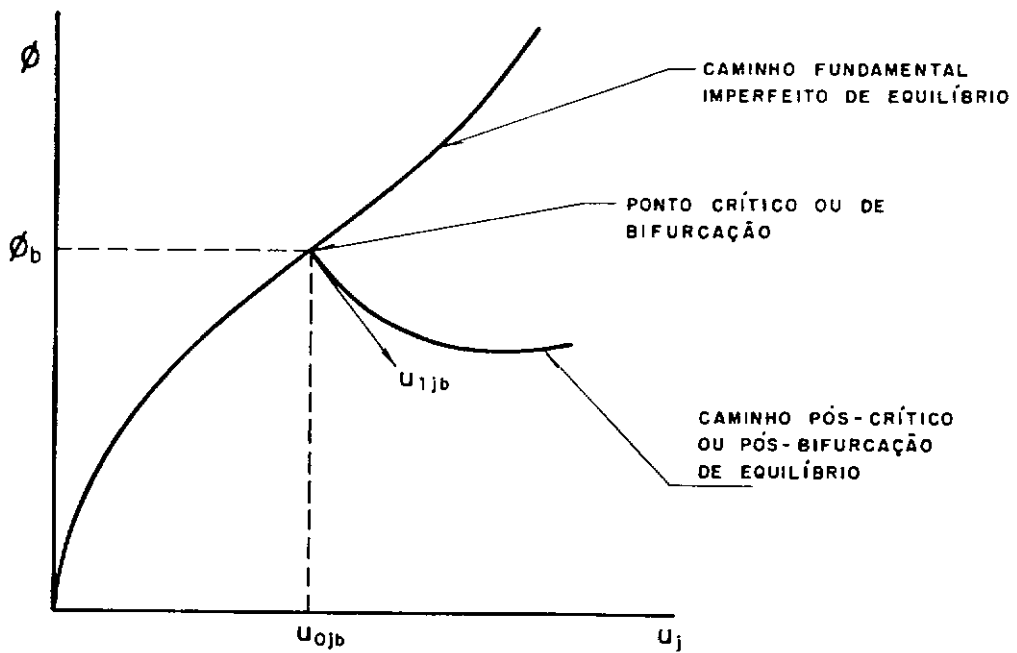
$$\delta \hat{V}_2(\underline{u}_1, \phi) = 0 \quad (V.3)$$

para toda variação ( $\delta$ ) admissível do campo incremental de deslocamentos  $\underline{u}_1$ .

A equação variacional (V.3) fornece um conjunto de equações diferenciais de equilíbrio crítico e, da solução do problema de autovalor resultante, são obtidos os parâmetros de carga crítica ou de bifurcação,  $\phi_{\min} = \phi_b$  e os modos críticos as

sociados  $\underline{u}_1 = \underline{u}_{1b}$ .

A figura (V.1) ilustra a bifurcação dos caminhos de equilíbrio ocorrendo ao longo do caminho fundamental imperfeito no ponto  $\phi = \phi_b$  (carga de bifurcação secundária), onde  $\underline{u}_0 = \underline{u}_{0b}$ .



**Fig. V.1** - Bifurcação de caminhos de equilíbrio.

Nessa figura, os caminhos de equilíbrio encontram-se projetados sobre o plano  $(\phi \times u_j)$ , onde  $u_j$  é uma componente particular do campo de deslocamento  $\underline{u}$ .

## V.2 - Forma dos Modos de Bifurcação Secundária

A forma de solução de equação variacional (V.3) para o painel é

$$u_{1p} = U_1 \cos m \eta \xi \sin 2 p \beta$$

$$v_{1p} = V_1 \sin m \eta \xi \cos 2 p \beta \quad (V.4.a)$$

$$w_{1p} = W_1 \sin m \eta \xi \sin 2 p \beta$$

a qual atende às condições de contorno de apoio simples em  $\xi = 0, \lambda$  e, sendo anti-simétrica com respeito à geratriz média do painel,  $\beta = 0$ , provoca um "salto dinâmico" de um estado deformado inicial para um estado deformado final, de maneira análoga ao que ocorre no caso de arcos abatidos sob cargas radiais [24]; este mecanismo de instabilidade é ilustrado na figura (V.2.b).

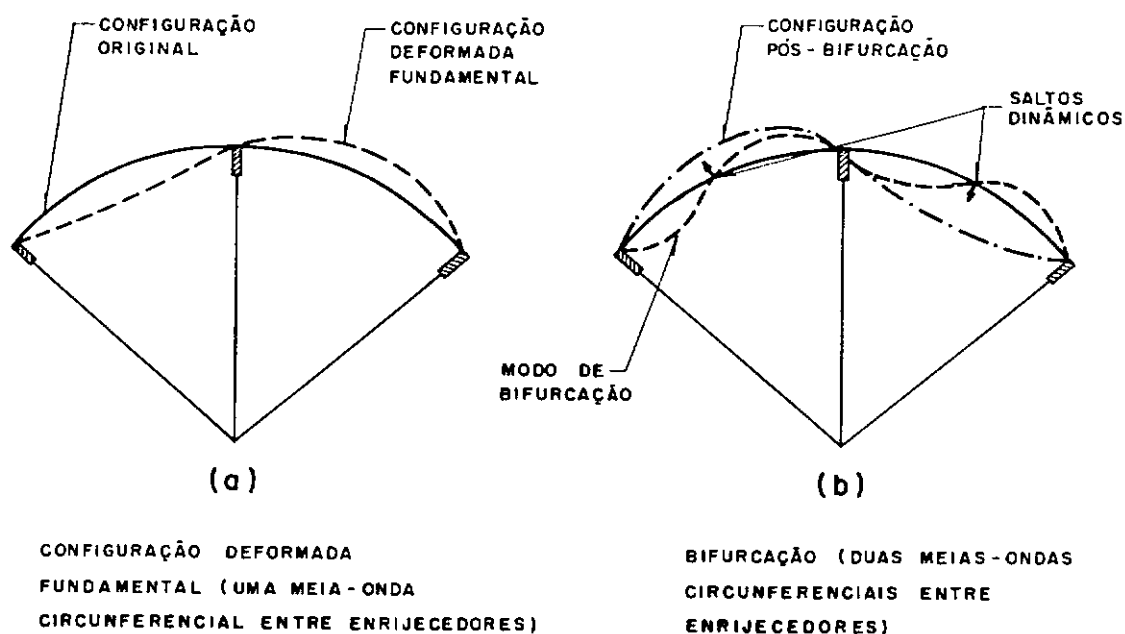


Fig. V.2 - Número de ondas circunferenciais do caminho fundamental e da bifurcação.



A correspondente forma de solução para o enrije-  
cedor, satisfazendo às condições de compatibilidade descritas na  
seção (II.2) do capítulo II, é

$$u_{1S} = 0$$

$$v_{1S} = (-V_1 + 2b W_1) \text{ sen } m q \xi \quad (V.4.b)$$

$$w_{1S} = 0$$

onde  $b = p(\zeta - \varepsilon)$

### V.3 - Funcional de Energia: Forma Incremental Quadrática $\hat{V}_2$

A forma incremental quadrática  $\hat{V}_2$  do funcional de  
energia do sistema imperfeito, em termos do campo de deslocamen-  
to incremental  $\underline{u}_1$ , é escrito, de maneira análoga às expressões  
(B.13.C) e (B.14.C) do apêndice B, como

$$\begin{aligned} \hat{V}_2(\underline{u}_1, \phi) = & \frac{1}{2} \int_0^\lambda \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \left[ \langle \underline{\varepsilon}_p^0, \underline{N}_p^2 \rangle + \langle \underline{\varepsilon}_p^1, \underline{N}_p^1 \rangle \right. \\ & + \langle \underline{\varepsilon}_p^2, \underline{N}_p^0 \rangle + \langle \underline{\chi}_p^0, \underline{M}_p^2 \rangle + \langle \underline{\chi}_p^1, \underline{M}_p^1 \rangle \\ & \left. + \langle \underline{\chi}_p^2, \underline{M}_p^0 \rangle \right] R^2 d\beta d\xi \\ & + \frac{1}{2} \int_0^\lambda \int_{-\gamma}^\gamma \left[ \langle \underline{\varepsilon}_s^0, \underline{N}_s^2 \rangle + \langle \underline{\varepsilon}_s^1, \underline{N}_s^1 \rangle \right. \\ & \left. + \langle \underline{\varepsilon}_s^2, \underline{N}_s^0 \rangle + \langle \underline{\chi}_s^0, \underline{M}_s^2 \rangle + \langle \underline{\chi}_s^1, \underline{M}_s^1 \rangle + \langle \underline{\chi}_s^2, \underline{M}_s^0 \rangle \right] R^2 d\zeta d\xi \end{aligned} \quad (V.5)$$

onde os tensores generalizados  $\underline{\varepsilon}$ ,  $\underline{\chi}$ ,  $\underline{N}$  e  $\underline{M}$  são definidos como no apêndice B e  $\langle, \rangle$  representa o produto interno de tensores; os super-índices 0, 1 e 2 definem respectivamente os estados fundamental e incrementais linear e quadrático e os subíndices p ou s designam painel ou enrijecedor.

Na montagem do funcional de energia (V.5) tem-se que, para o painel, as relações deformação-deslocamento do estado fundamental imperfeito são as definidas pelas expressões (III.2) e as relações deformação-deslocamento incrementais lineares e quadráticas, incluindo imperfeições iniciais, são respectivamente dadas por

$$\varepsilon_{\beta}^1 = v_1^{\bullet} + w_1 + (w_0^{\bullet} + \bar{w}^{\bullet}) w_1^{\bullet}$$

$$\varepsilon_{\xi}^1 = u_1' + (w_0' + \bar{w}') w_1' \quad (V.6.a)$$

$$\varepsilon_{\beta\xi}^1 = \frac{1}{2} \left[ u_1^{\bullet} + v_1' + (w_0' + \bar{w}') w_1^{\bullet} + (w_0^{\bullet} + \bar{w}^{\bullet}) w_1' \right]$$

$$\varepsilon_{\beta}^2 = \frac{1}{2} w_1^{\bullet 2}$$

$$\varepsilon_{\xi}^2 = \frac{1}{2} w_1'^2 \quad (V.6.b)$$

$$\varepsilon_{\beta\xi}^2 = \frac{1}{2} w_1' w_1^{\bullet}$$

Analogamente para o enrijecedor, as relações deformação-deslocamento do estado fundamental imperfeito são dadas pelas expressões (III.3) e as incrementais lineares e quadráticas, incluindo imperfeições iniciais, são respectivamente, dadas por,

$$\varepsilon_{\zeta}^1 = w_1^* + (v_0^* + \bar{v}^*) v_1^*$$

$$\varepsilon_{\xi}^1 = u_1' + (v_0' + \bar{v}') v_1' \quad (V.7.a)$$

$$\varepsilon_{\zeta\xi}^1 = \frac{1}{2} \left[ u_1^* + w_1' + (v_0^* + \bar{v}^*) v_1' + (v_0' + \bar{v}') v_1^* \right]$$

$$\varepsilon_{\zeta}^2 = \frac{1}{2} v_1^{*2}$$

$$\varepsilon_{\xi}^2 = \frac{1}{2} v_1'^2 \quad (V.7.b)$$

$$\varepsilon_{\zeta\xi}^2 = \frac{1}{2} v_1^* v_1'$$

e permanecem inalteradas e definidas no apêndice B, as mudanças de curvatura dos estados fundamental e incremental (B.7.d) do panel e (B.8.d) do enrijecedor, assim como as relações para resultantes de tensão (B.10.a) no painel e (B.10.b) no enrijeedor.

#### V.4 - Equações de Equilíbrio Crítico

Utilizando a forma (V.4) para os modos de bifurcação e a forma (III.8) ou (III.10), para os modos do caminho fundamental de equilíbrio na montagem do funcional de energia (V.5), a equação variacional (V.3) fornece um conjunto de 3 equações lineares de equilíbrio crítico em termos das amplitudes ( $U_1$ ,  $V_1$ ,  $W_1$ ) dos modos de bifurcação (V.4).

Essas equações lineares são:

$$\begin{aligned}
 & \left[ n^2 q^2 + 2(1-\nu) p^2 \right] U_1 + (1+\nu) m p q V_1 \\
 & + \left[ -\nu m q + n m^2 q^3 d_{o_2} \delta_{mn} \right. \\
 & \left. - 2(1-\nu) n q p^2 d_{o_2} (\delta_{m2n} + \delta_{3m2n}) \right] W_1 = 0
 \end{aligned} \tag{V.8.a}$$

$$(1+\nu) m p q U_1 + \left\{ 4 p^2 + \frac{1}{2}(1-\nu) m^2 q^2 + 2\mu m^2 q^2 \left[ \alpha \eta^2 m^2 q^2 \right. \right.$$

$$\left. + u_{o_1} + \nu w_{o_1} + \frac{1}{4} (2 + \delta_{mn}) n^2 q^2 r_{22} + \frac{1}{4} p^2 (2 - \delta_{mn}) \bar{f} \right.$$

$$\left. + n^2 q^2 v_{o_3}^2 (2 - \delta_{m2n}) - \frac{2}{p} n^2 q^2 s_1 w_{o_3} \delta_{mn} + n q u_{o_3} \delta_{mn} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \nu w_{o_3} \delta_{mn} \right] \left\{ V_1 + \left\{ -2 p + 4\mu m^2 q^2 \left[ s_1 (\alpha \eta^2 m^2 q^2 \right. \right. \right.$$

$$\left. + u_{o_1} + \nu w_{o_1} \right) + \frac{1}{2} \nu s_1 w_{o_3} \delta_{mn} - \frac{1}{4} n^2 q^2 (2 + \delta_{mn}) r_{23} \right]$$

$$+ \mu m p q \left[ m p q (2 - \delta_{mn}) s_1 \bar{f} - n p q \delta_{mn} (s_1 \bar{f} + r_{25}) \right.$$

$$\left. + \frac{4}{p} m n q^2 s_1 u_{o_3} \delta_{mn} \right] + 4\mu m^2 n^2 q^4 \left[ -\frac{2}{p} s_2 w_{o_3} \delta_{mn} \right.$$

$$\left. + s_1 v_{o_3}^2 (2 - \delta_{m2n}) \right] - 2(1-\nu) \mu m n q^2 s_1 w_{o_3} \delta_{mn} \left\{ W_1 = 0 \tag{V.8.b} \right.$$

$$\begin{aligned}
 & \left[ -vmq + nm^2q^3d_{o_2} \delta_{mn} - 2(1-v)nq p^2d_{o_2} (\delta_{m2n} + \delta_{3m2n}) \right] U_1 \\
 & + \left\{ -2p + 4\mu m^2q^2 \left[ s_1 (\alpha \eta^2 m^2q^2 + u_{o_1} + vw_{o_1}) \right. \right. \\
 & - \frac{1}{4} n^2q^2(2 + \delta_{mn}) r_{23} + \frac{1}{2} vs_1 w_{o_3} \delta_{mn} \left. \right] \\
 & + \mu mpq \left[ m p q s_1 (2-\delta_{mn}) \bar{F} - npq \delta_{mn} (s_1 \bar{F} + r_{25}) \right. \\
 & + \frac{4}{p} m n q^2 s_1 u_{o_3} \delta_{mn} \left. \right] + 4\mu m^2n^2q^4 \left[ s_1 v_{o_3}^2 (2 - \delta_{m2n}) \right. \\
 & - \frac{2}{p} s_2 w_{o_3} \delta_{mn} \left. \right] - 2\mu (1-v) mnq^2 s_1 w_{o_3} \delta_{mn} \left. \right\} V_1 \\
 & + \left\{ 1 + \alpha (4 p^2 + m^2q^2)^2 + 4 p^2(w_{o_1} + v u_{o_1}) \right. \\
 & + m^2q^2(u_{o_1} + vw_{o_1}) + \frac{1}{2} (2+\delta_{mn}) (p^4 + \frac{1}{4} m^2n^2q^4) g_w \\
 & + \frac{1}{8} p^2q^2(4n^2 + m^2) (2-\delta_{mn}) \bar{F} + 8\mu \left[ p^2(w_{o_1} + vu_{o_1}) \right. \\
 & + s_2 m^2q^2(u_{o_1} + vw_{o_1}) + \frac{1}{4} (2+\delta_{mn}) (p^4 g_w + n^2m^2q^4 r_{24}) \\
 & + \frac{1}{4} p^2q^2 \left[ \left[ m^2 s_2 \bar{F} + n^2(r_{21} + \frac{1}{2} (1-v)s_2 a_1^2) \right] (2 - \delta_{mn}) \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \, m n \, \delta_{mn} \left( r_{12} \, f_w - \frac{1}{2} (1-v) \, s_2 \, a_1^2 \right) \Bigg] \\
& + \frac{1}{2} \, m^2 n^2 q^4 \, (2 \, d_{o_2}^2 + d_{12}) \, (2 - \delta_{m2n}) \\
& + \alpha \, \eta^2 \, m^2 q^2 \, \left[ m^2 q^2 \, s_2 + 2 \, (1-v) \, p^2 \right] \Bigg] \\
& + n \, m^2 \, q^3 \, u_{o_3} \, \delta_{mn} - 2 \, p^2 w_{o_3} \, \delta_{mn} + v \, \left[ \frac{1}{2} \, m^2 q^2 \, w_{o_3} \, \delta_{mn} \right. \\
& - 4 \, n \, p^2 q \, u_{o_3} \, \delta_{mn} - 2 \, m n \, q^2 \, d_{o_2} \, \delta_{mn} \\
& \left. + 2 \, n^2 p^2 q^2 d_{12} (2 + \delta_{m2n}) \right] + 2 \, (1-v) \, n^2 p^2 q^2 d_{o_2}^2 (2 + \delta_{mn}) \\
& + 8\mu \, \left[ m^2 n^2 q^4 \, s_2 \, v_{o_3}^2 (2 - \delta_{m2n}) - \frac{1}{2} \, p^2 \, w_{o_3} \, \delta_{mn} \right. \\
& + n \, m^2 q^3 s_2 \, w_{o_3} \, \delta_{mn} - \frac{2}{p} \, m^2 n^2 q^4 \, s_3 \, w_{o_3} \, \delta_{mn} \\
& + v \, \left[ \frac{1}{2} \, n^2 p^2 q^2 \, v_{o_3}^2 (2 + \delta_{m2n}) + n p q \, (-p u_{o_3} + 2 \, n q \, s_1 \, w_{o_3}) \, \delta_{mn} \right. \\
& + \frac{1}{2} \, m^2 q^2 s_2 \, w_{o_3} \, \delta_{mn} \Bigg] + \frac{1}{2} \, (1-v) \, n q \, \left[ n q \, p^2 \, v_{o_3}^2 (2 + \delta_{m2n}) \right. \\
& \left. \left. - 2 \, m \, q \, s_2 \, w_{o_3} \, \delta_{mn} \right] \right] \Bigg\} \, W_1 = 0 \tag{V.8.c}
\end{aligned}$$

onde as variáveis, ainda não definidas anteriormente, nas equações (V.8.a-c) são encontradas no apêndice A.

Uma solução não-trivial para o sistema linear homogêneo das equações (V.8.a-c) existe se, e somente se, o determinante da matriz dos coeficientes desse sistema for nulo. O menor valor de  $\phi$ , para o qual esta condição é satisfeita, é o parâmetro de carga de bifurcação secundária,  $\phi_{\min} = \phi_b$ , obtido ao longo do caminho fundamental imperfeito de equilíbrio da solução (III.8) ou (III.10).

## CAPÍTULO VI

ALGUNS RESULTADOS TEÓRICOS DE CARGAS DE BIFURCAÇÃO SECUNDÁRIA



## CAPÍTULO VI

## ALGUNS RESULTADOS TEÓRICOS DE CARGAS DE BIFURCAÇÃO SECUNDÁRIA

## VI.1 - Considerações Iniciais

Os resultados teóricos, apresentados a seguir, são válidos para geometrias e características elásticas dos cilindros classificados na tabela (IV.2) do capítulo IV.

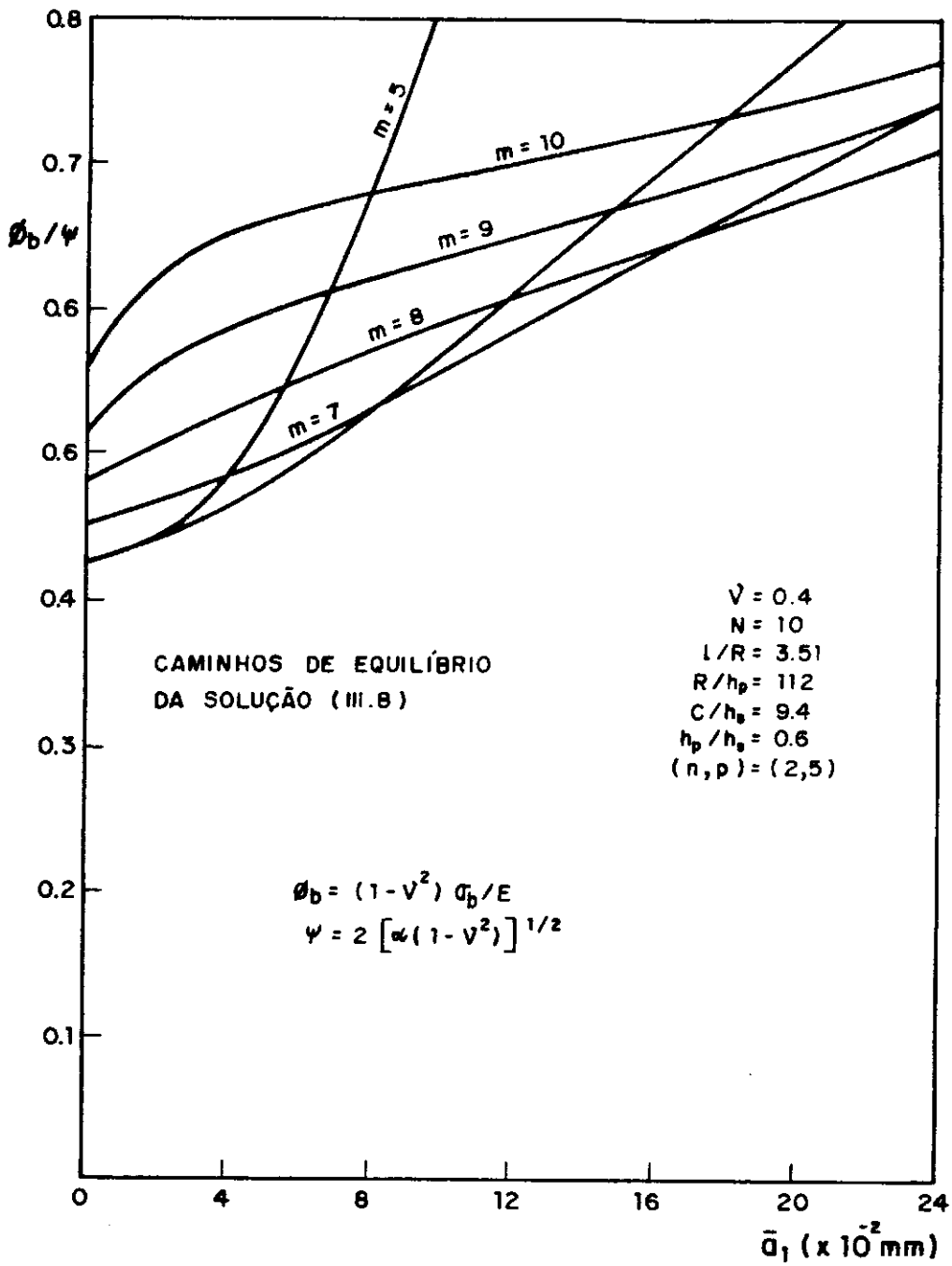
Para os cilindros tipo B e  $C_1$  não foram encontradas cargas de bifurcação secundária, na forma dos modos (V.4), ao longo dos caminhos de equilíbrio apresentados no capítulo IV. Deve ser lembrado ainda que, tanto para as cascas tipo B quanto  $C_1$ , as cargas críticas obtidas foram próximas ( $\phi_c / \psi \sim 1$ ) da carga crítica clássica da casca isotrópica, havendo, portanto, na resposta não-linear destes cilindros, interação confirmada entre deformações elásticas local e global, estudadas no capítulo II.

Por outro lado, o modelo de casca  $A_1$ , tendo os enrijecedores esbeltos e bastantes espaçados e com características torsionais que influenciam sobremaneira o comportamento dos painéis cilíndricos, permitiu uma análise satisfatória de cargas de bifurcação secundárias, na forma dos modos adotados.

## VI.2 - Análise de Resultados Teóricos

As figuras (VI.1) a (VI.3) e a tabela (VI.1) são referentes ao modelo de casca  $A_1$ .

A figura (VI.1) mostra a influência da amplitude assimétrica,  $\bar{a}_1$ , sobre a carga de bifurcação secundária,  $\phi_b / \psi$ , ocorrendo ao longo de caminhos imperfeitos de equilíbrio, associados aos modos (III.8), para diversos valores de  $n$ 's. de semi-ondas longitudinais de bifurcação,  $m$ . Observa-se que o parâmetro de bifurcação secundária,  $\phi_b / \psi$ , aumenta com a amplitude de



**Fig. VI.1** - Dependência da carga de bifurcação secundária com a amplitude de imperfeição radial  $\bar{a}_1$ .

imperfeição  $\bar{a}_1$ , para todos os valores de  $m$  analisados.

A tabela (VI.1) contém valores de  $\phi_b/\psi$  para diversas amplitudes de imperfeição  $\bar{a}_1$ , ocorrendo ao longo de caminhos imperfeitos associados aos modos combinados (III.10). Tanto nesta tabela quanto na figura (VI.2), manteve-se fixa a relação entre imperfeições,  $\bar{a}_1/\bar{a}_2 = 10$ , exceto para o caso perfeito em que  $\bar{a}_1 = \bar{a}_2 = 0$ .

Tabela VI.1 - Cargas de Bifurcação Secundária,  $\phi_b/\psi$ , para caminhos de Equilíbrio de modos Combinados (III.10).

$\bar{a}_1$ (mm)	0.000	0.040	0.080	0.120	0.160	0.200
m	VALORES DE $\phi_b/\psi$					
5	0.420	-	-	-	-	-
6	0.436	0.476	0.612	0.898	1.267	1.780
7	0.460	0.517	0.572	0.681	0.763	0.844
8	0.490	0.545	0.626	0.680	0.735	0.790
9	0.517	0.626	0.681	0.708	0.749	0.804
10	0.585	0.694	0.722	0.776	0.803	0.830

Observa-se aqui também, ao longo de caminhos imperfeitos associados aos modos combinados (III.10), que o parâmetro crítico de bifurcação secundária,  $\phi_b/\psi$ , aumenta com a amplitude de imperfeição  $\bar{a}_1$ , para todos os valores de  $m$  analisados, exceto quando  $m=5$ , onde se encontra cargas de bifurcação, apenas para o caso do cilindro perfeito.

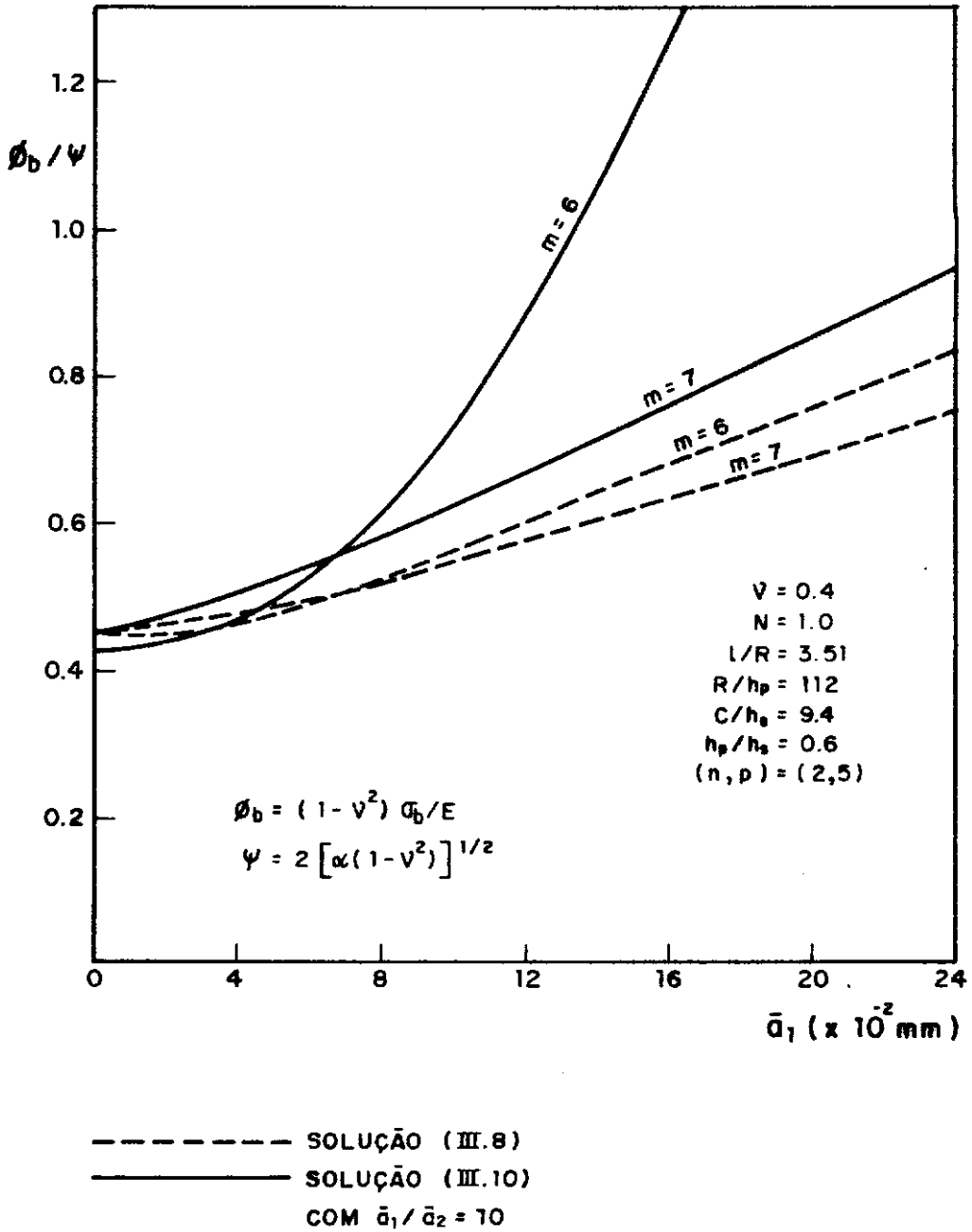


Fig. VI.2 - Influência da amplitude de imperfeição radial  $\bar{a}_1$  na carga de bifurcação secundária normalizada,  $\phi_b/\psi$

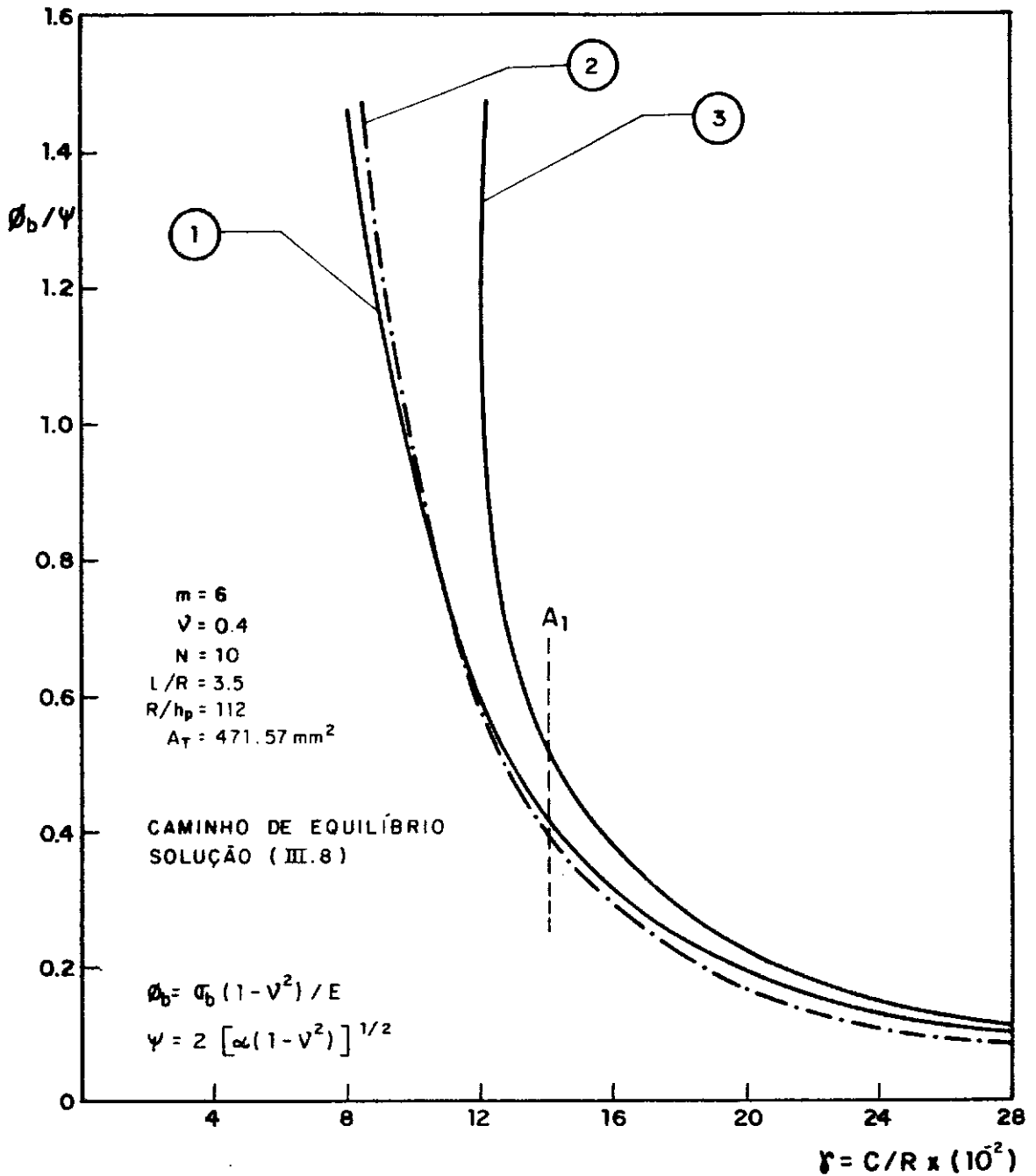
A figura (VI.2) faz comparações entre resultados para parâmetros críticos de bifurcação secundária, ocorrendo ao longo de caminhos de equilíbrio nas formas (III.8) e (III.10). As curvas são válidas para n<sup>os</sup>. de semi-ondas longitudinais  $m=6$  e  $7$  e para variações da amplitude de imperfeição assimétrica,  $\bar{a}_1$ . Observa-se que o parâmetro crítico de bifurcação secundária,  $\phi_b/\Psi$ , para os modos secundários (V.4), obtidos ao longo de caminhos imperfeitos associados a solução (III.8), tornam-se bem inferiores àqueles correspondentes aos modos combinados (III.10) à medida que  $\bar{a}_1$  aumenta e para todos os valores de  $m$  analisados.

Este comportamento, já esperado, deve-se ao fato de que modos combinados (III.10) produzem, relativamente aos modos assimétricos (III.8), respostas não-lineares com maior perda de rigidez inicial, envolvendo portanto uma maior restrição ao desenvolvimento de deformações torsionais nesses modos combinados. Este comportamento é ainda, como comentado anteriormente, mais acentuado para acréscimos de imperfeições axissimétricas.

A figura (VI.3) mostra a influência do parâmetro semi-largura do enrijecedor,  $\gamma(=C/R)$ , no parâmetro de carga de bifurcação,  $\phi_b/\Psi$ . As curvas mostradas nessa figura são:

- A) CURVA 1 - Bifurcação primária da casca perfeita na forma dos modos antissimétricos (V.4);
- B) CURVA 2 - Bifurcação primária da casca perfeita na forma dos modos complexos (II.2.15) do capítulo II, que são desenvolvidos no apêndice C;
- C) CURVA 3 - Bifurcação secundária na forma de modos (V.4), ocorrendo ao longo de caminhos imperfeitos (III.8), sendo que  $\bar{a}_1 = 0.08$  mm, é mantida constante.

Com as curvas 1 e 2, deve-se observar que a bifurcação primária (curva 1) para a casca perfeita ocorre para níveis de cargas muito próximos àqueles associados a bifurcação primária (curva 2 em traço-ponto) na forma (II.2.15).



CURVA 1 - BIFURCAÇÃO PRIMÁRIA NA FORMA (V.4)

CURVA 2 - BIFURCAÇÃO PRIMÁRIA NA FORMA (II.2.15)

CURVA 3 - BIFURCAÇÃO SECUNDÁRIA NA FORMA (V.4) COM  $\bar{a}_1/h_p = 0.13$

**Fig. VI.3** - Influência do parâmetro semi-largura  $\gamma$  do enrijecedor na carga de bifurcação normalizada  $\phi_b/\psi$ .

Essas curvas referem-se a cascas tendo valores fixos para  $N=10$ ,  $l/R=3.51$ ,  $R/h_p=112$  e a área total da seção transversal da casca,  $A_T = 471.57 \text{ mm}^2$ . A análise é válida para  $n = 2$  e  $m = 6$ , estando o modelo de casca  $A_1$ , indicado na figura pela linha tracejada vertical,  $\gamma \sim 0.14$ .

Observa-se na figura (VI.3) que, para valores de  $\gamma < 0.10$ , o parâmetro de carga crítica de bifurcação,  $\phi_b / \Psi$ , aumenta consideravelmente em todas as curvas analisadas ( $\phi_b / \Psi > 1.0$ ), indicando, portanto, que as características torsionais de enrijecedores menos esbeltos não dominam mais a resposta não-linear dos painéis cilíndricos. Nesses casos, é mais adequada a análise da estabilidade elástica global, conforme mostrada no capítulo II, para obtenção de cargas de bifurcação.

Por outro lado, para valores crescentes de  $\gamma > 0.10$  as características torsionais dos enrijecedores esbeltos começam a ter influência dominante como fator de redução de cargas de bifurcação e esta redução se acentua com o crescimento de  $\gamma$ ; isto pode ser observado em todas as curvas da figura (VI.3).

Nota-se ainda nesta figura que, na região de  $\gamma > 0.10$ , todas as curvas mostradas se aproximam entre si, indicando que nessa região haverá interação entre modos primários e secundários.

É importante, portanto, que se conheça a faixa de valores de  $\gamma$  onde ocorre proximidade entre pontos de bifurcação primária e secundária, pois em uma análise não-linear haveria a necessidade de inclusão de modos secundários (V.4) nas soluções (III.10) e também a inclusão de imperfeições geométricas na forma de modos dominantes de (V.4). Seria possível, então, a ocorrência de pontos limites ao longo de caminhos imperfeitos de equilíbrio, analogamente ao comportamento observado em arcos abatidos [24].

## CAPÍTULO VII

### COMENTÁRIOS FINAIS



## CAPÍTULO VII

### COMENTÁRIOS FINAIS

Estudos sobre a estabilidade elástica local e global em cilindros enrijecidos foram feitos no presente trabalho.

O efeito causado por modos axissimétricos, interagindo com os modos assimétricos clássicos, foi considerado numa análise não-linear, a qual inclui também imperfeições iniciais na forma dos modos dominantes.

Em consequência dos desenvolvimentos analíticos apresentados, algumas observações importantes podem ser feitas:

- A) - As respostas não-lineares obtidas, para geometria e modos analisados, foram todas estáveis;
- B) - No entanto, embora o comportamento observado fosse sempre estável, as cargas críticas teóricas encontradas foram, para certas geometrias, bem inferiores às associadas a casca isotrópica;
- C) - Os principais fatores de influência na redução das cargas de bifurcação (primária e secundária) são o nível de esbeltez e espaçamento dos enrijecedores. Foi mostrado que tal combinação de fatores têm efeito dominante sobre o comportamento estrutural destes cilindros;
- D) - A solução proposta de modos combinados (III.10) produziu respostas não-lineares que, mesmo sendo estáveis, apresentam perda de rigidez inicial e sensibilidade a imperfeições mais acentuadas do que aquelas associadas à solução de modos asimétricos (III.8);

- E) - A diferença existente entre respostas não-lineares para modos combinados (III.10) e para modos assimétricos (III.8) se acentua à medida que as deformações na casca aumentam;
- F) - As cargas de bifurcação secundária, ocorrendo ao longo de caminhos não-lineares na forma de modos combinados (III.10), foram superiores àquelas obtidas com os modos assimétricos (III.8); este fato é devido principalmente ao efeito causado pela componente axissimétrica na combinação de modos (III.10): embora a inclusão dessa componente modal produza perda substancial de rigidez inicial, ela implica também, devido a sua própria forma, em uma restrição a deformações torsionais dos enrijecedores, dificultando assim uma possível configuração de bifurcação dos painéis cilíndricos na forma dos modos (V.4).

Como contribuições para pesquisas futuras sobre o assunto, algumas considerações dentro do contexto do presente trabalho podem ser delineadas:

- 1) - A interação não-linear entre modos de deformação, já que resultando em perda de rigidez estrutural, deve ser leva-da em conta em análises futuras, as quais poderão explorar os efeitos de acoplamento com outros modos não considera-dos no presente trabalho.
- 2) - Eliminação da imposição analítica de uma meia-onda circunferencial entre enrijecedores ( $p = N/2$ ) na forma dos modos (III.8) ou (III.10); para isto, e em virtude da grande complexidade de cálculos existentes, deve-se recorrer a méto-dos de integração numérica de resolução, para a obtenção de caminhos de quílibrio;
- 3) - Possibilidade de inclusão de modos secundários (V.4) inte-ragindo com a forma de modos combinados (III.10) numa aná-lise não-linear, incluindo também imperfeições em todos esses modos. Isto permitiria a investigação de uma possível ocorrência de pontos limites ao longo de respostas não-li-

neares dessas cascas. Durante a fase final de desenvolvimento do presente trabalho, tomou-se conhecimento da referência [4]. Nessa referência é mostrado, através de estudo de um modelo particular, que a inclusão de modos secundários numa análise não-linear imperfeita pode levar realmente à obtenção de pontos limites, indicando nesses casos instabilidade.

- 4) -Nos casos, como os das cascas tipos B e C1 analisadas, onde não foram detectadas bifurcações secundárias, torna-se necessária uma investigação de plastificação local. Com o comportamento elástico estável, mesmo para estágios avançados de deformação, é natural se supor que o colapso ocorrerá eventualmente por mecanismos plásticos; isto tem sido observado experimentalmente [1].

Finalmente, pode-se concluir de forma geral que o presente trabalho, além de tornar um pouco mais claro o comportamento não-linear de cascas enrijecidas longitudinalmente sob compressão axial, fornece alguns subsídios para pesquisas posteriores sobre a interação entre a instabilidade local e global, que ocorre para essas cascas, assunto este ainda pouco estudado, mas de grande interesse atual.

## APENDICE A

## APÊNDICE A

LISTA DAS VARIÁVEIS E EXPRESSÕES AUXILIARES EMPREGADAS  
NO DESENVOLVIMENTO DAS EQUAÇÕES

$$f = w_{O_2} (a_1 + w_{O_2} / 2)$$

$$f = a_1 + w_{O_2}$$

$$g = f f_w$$

$$f_w^2 = a_1^2 + 2 f$$

$$g_w = f_w^2 + f$$

$$s_i = \frac{(-1)^i}{2\gamma} \int_{\gamma}^{\gamma} b^i d\zeta ; i=1,2,3,4$$

$$\gamma = C/R$$

$$b = p(\zeta - \epsilon)$$

$$r_{1i} = (-1)^{i-1} (s_{i-1} v_{O_2} - s_i f_w) ; i=1,2,3,4$$

$$r_{21} = \frac{1}{2} v_{O_2}^2 - s_1 v_{O_2} f_w + s_2 f$$

$$r_{2i} = (-1)^i \left( \frac{3}{2} s_{i-2} v_{O_2}^2 - 3 s_{i-1} v_{O_2} f_w + s_i g_w \right); i=2,3,4$$

$$r_{25} = v_{02} f_w - s_1 g_w$$

$$r_{26} = -\frac{1}{2} s_1 v_{02}^2 + s_2 v_{02} f_w - s_3 f$$

$$d_{02} = w_{03} + a_2$$

$$d_{11} = w_{02} d_{02} + a_1 w_{03}$$

$$d_{12} = w_{03} (d_{02} + a_2)$$

$$r_{31} = \frac{1}{2} v_{02}^3 - \frac{3}{2} s_1 v_{02}^2 f_w + s_2 v_{02} g_w - s_3 g$$

$$r_{32} = -\frac{1}{2} s_1 v_{02}^3 + \frac{3}{2} s_2 v_{02}^2 f_w - s_3 v_{02} g_w + s_4 g$$

$$r_{33} = \frac{1}{2} v_{02}^2 f_w - s_1 v_{02} g_w + 2 s_2 g$$

$$\bar{f} = f + (1-v) a_1^2 / 2$$

$$\delta_{mm} = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ 1 & \text{se } m = n \end{cases} \quad (\text{operador})$$

Delta de Kronecker)

$$\phi = (1-v^2) \frac{\sigma}{E}$$

$$\mu = \eta \gamma / \beta_0$$

## APÊNDICE B

ENERGIA POTENCIAL TOTAL NA FORMA INCREMENTAL:

A VARIAÇÃO TOTAL DE ENERGIA

## APENDICE B

### ENERGIA POTENCIAL TOTAL NA FORMA INCREMENTAL:

#### A VARIAÇÃO TOTAL DE ENERGIA

#### B.1 - ESTADOS ADJACENTES DE EQUILÍBRIO

Considerando-se o campo de deslocamentos descrevendo uma configuração vizinha a fundamental na forma

$$\underline{u} = \underline{u}_0 + \underline{u}^I \quad (\text{B.1})$$

onde  $\underline{u}_0$  é a solução fundamental e  $\underline{u}^I$  a solução incremental cinematicamente admissível, as correspondentes deformações específicas  $\underline{\varepsilon}$  e mudanças de curvatura  $\underline{\chi}$  ficam,

$$\begin{aligned} \underline{\varepsilon} &= \underline{\varepsilon}^0 + \underline{\varepsilon}^I \\ \underline{\chi} &= \underline{\chi}^0 + \underline{\chi}^I \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

e as resultantes de tensão associadas,

$$\begin{aligned} \underline{N} &= \underline{N}^0 + \underline{N}^I \\ \underline{M} &= \underline{M}^0 + \underline{M}^I \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

onde em (B.2) e (B.3) os super-índices 0 e I referem-se aos campos fundamental e incremental respectivamente.

Com a transformação (B.1) a variação total de energia potencial, ocorrendo entre o estado fundamental e um estado adjacente de equilíbrio, pode ser escrita na forma expandida

$$\begin{aligned} V(\underline{u}_0 + \underline{u}^I, \phi) - V_0(\underline{u}_0, \phi) &= V_1(\underline{u}^I, \phi) + V_2(\underline{u}^I, \phi) + \\ &+ V_3(\underline{u}^I, \phi) + \dots \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$



onde cada parcela  $V_i(\underline{u}^I, \phi)$  contém os termos de  $i$ -ésimo grau em  $\underline{u}^I$  e suas derivadas e cujos funcionais  $V_i$  satisfazem as relações

$$V_1(\underline{u}_1 + \underline{u}^*) = V_1(\underline{u}_1) + V_1(\underline{u}^*)$$

$$V_2(\underline{u}_1 + \underline{u}^*) = V_2(\underline{u}_1) + V_{11}(\underline{u}_1, \underline{u}^*) + V_2(\underline{u}^*) \quad (B.5)$$

$$V_3(\underline{u}_1 + \underline{u}^*) = V_3(\underline{u}_1) + V_{21}(\underline{u}_1, \underline{u}^*) + V_{12}(\underline{u}_1, \underline{u}^*) + V_3(\underline{u}^*)$$

⋮

nas expressões (B.5) o primeiro índice inferior de  $V$  denota o grau dos termos em  $\underline{u}_1$  e o segundo, os graus dos termos em  $\underline{u}^*$ .

## B.2 - TENSORES DE DEFORMAÇÃO E RESULTANTES DE TENSÃO

Usando super-índices  $i=0,1,2$  para representar respectivamente os estados fundamental, incrementais linear e quadrático e denotando, através dos subíndices  $p$  ou  $s$ , as componentes associadas ao painel ou enrijecedor, as deformações específicas  $\underline{\epsilon}$  e as mudanças de curvatura  $\underline{\chi}$  podem ser escritas na forma tensorial

$$\underline{\epsilon}_p^i = \left\{ \epsilon_\beta^i, \epsilon_\xi^i, \epsilon_{\beta\xi}^i \right\}^T$$

$$\underline{\epsilon}_s^i = \left\{ \epsilon_\zeta^i, \epsilon_\xi^i, \epsilon_{\zeta\xi}^i \right\}^T$$

(B.6.a)

$$\underline{\chi}_p^i = \left\{ \chi_\beta^i, \chi_\xi^i, \chi_{\beta\xi}^i \right\}^T$$

$$\underline{\chi}_s^i = \left\{ \chi_\zeta^i, \chi_\xi^i, \chi_{\zeta\xi}^i \right\}^T ; \quad i=0,1,2$$

e as resultantes de tensão, analogamente, como

$$N_{\sim p}^i = \left\{ N_{\beta}^i, N_{\xi}^i, N_{\beta\xi}^i \right\}$$

$$N_{\sim s}^i = \left\{ N_{\zeta}^i, N_{\xi}^i, N_{\zeta\xi}^i \right\}$$

(B.6.b)

$$M_{\sim p}^i = \left\{ M_{\beta}^i, M_{\xi}^i, M_{\beta\xi}^i \right\}$$

$$M_{\sim s}^i = \left\{ M_{\zeta}^i, M_{\xi}^i, M_{\zeta\xi}^i \right\} ; \quad i=0,1,2$$

### B.3 - COMPONENTES DOS TENSORES DE DEFORMAÇÃO

As diversas componentes dos tensores de deformação  $\varepsilon^i$ ,  $\chi^i$ ;  $i=0,1,2$ , definidas nas expressões (B.6.a) para o pa nel são dadas por [22]

$$\varepsilon_{\beta}^0 = v_0^{\bullet} + w_0 + \frac{1}{2} w_0^{\bullet 2}$$

$$\varepsilon_{\xi}^0 = u_0' + \frac{1}{2} w_0'^2 \quad (B.7.a)$$

$$\varepsilon_{\beta\xi}^0 = \frac{1}{2} (u_0' + v_0' + w_0' w_0^{\bullet})$$

e

$$\varepsilon_{\beta}^1 = v_1^{\bullet} + w_1 + w_0^{\bullet} w_1^{\bullet}$$

$$\varepsilon_{\xi}^1 = u_1' + w_0^{\bullet} w_1' \quad (B.7.b)$$

$$\epsilon_{\beta\xi}^1 = \frac{1}{2} (u_1^\bullet + v_1^\bullet + w_0' w_1^0 + w_0^\bullet w_1')$$

e

$$\epsilon_{\beta}^2 = \frac{1}{2} w_1^{\bullet 2}$$

$$\epsilon_{\xi}^2 = \frac{1}{2} w_1'^2 \quad (\text{B.7.c})$$

$$\epsilon_{\beta\xi}^2 = \frac{1}{2} w_1' w_1^\bullet$$

e

$$\chi_{\beta}^0 = w_0^{\bullet\bullet}/R ; \chi_{\xi}^0 = w_0''/R ; \chi_{\beta\xi}^0 = w_0^{\bullet'} / R$$

$$\chi_{\beta}^1 = w_1^{\bullet\bullet}/R ; \chi_{\xi}^1 = w_1''/R ; \chi_{\beta\xi}^1 = w_1^{\bullet'} / R \quad (\text{B.7.d})$$

$$\chi_{\beta}^2 = \chi_{\xi}^2 = \chi_{\beta\xi}^2 = 0$$

Analogamente, para o enrijecedor [20],

$$\epsilon_{\zeta}^0 = w_0^* + \frac{1}{2} v_0^{*2}$$

$$\epsilon_{\xi}^0 = u_0' + \frac{1}{2} v_0'^2 \quad (\text{B.8.a})$$

$$\epsilon_{\zeta\xi}^0 = \frac{1}{2} (u_0^* + w_0' + v_0' v_0^*)$$

e

$$\varepsilon_{\zeta}^1 = w_1^* + v_0^* v_1^*$$

$$\varepsilon_{\xi}^1 = u_1' + v_0' v_1' \quad (\text{B.8.b})$$

$$\varepsilon_{\zeta\xi}^1 = \frac{1}{2} (u_1^* + w_1' + v_0^* v_1' + v_0' v_1^*)$$

e

$$\varepsilon_{\zeta}^2 = \frac{1}{2} v_1^{*2}$$

$$\varepsilon_{\xi}^2 = \frac{1}{2} v_1'^2 \quad (\text{B.8.c})$$

$$\varepsilon_{\zeta\xi}^2 = \frac{1}{2} v_1^* v_1'$$

e

$$\chi_{\zeta}^0 = v_0^{**}/R ; \chi_{\xi}^0 = v_0''/R ; \chi_{\zeta\xi}^0 = v_0^{*'} / R$$

$$\chi_{\zeta}^1 = v_1^{**}/R ; \chi_{\xi}^1 = v_1''/R ; \chi_{\zeta\xi}^1 = v_1^{*'} / R \quad (\text{B.8.d})$$

$$\chi_{\zeta}^2 = \chi_{\xi}^2 = \chi_{\zeta\xi}^2 = 0$$

onde os operadores de derivação são definidos como,

$$(\quad)^{\bullet} = \frac{\partial}{\partial \beta} ; \quad (\quad)' = \frac{\partial}{\partial \xi} ; \quad (\quad)^{*} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \quad (\text{B.9})$$

## B.4 - COMPONENTES DOS TENSORES RESULTANTES DE TENSÃO

As componentes dos tensores resultantes de tensão  $N^i$ ,  $M^i$ ;  $i = 0,1,2$ , definidos pelas relações (B.6.b) para o painel são  $[20]$

$$N_{\beta}^i = K (\epsilon_{\beta}^i + \nu \epsilon_{\xi}^i)$$

$$N_{\xi}^i = K (\epsilon_{\xi}^i + \nu \epsilon_{\beta}^i)$$

$$N_{\beta\xi}^i = 2K (1-\nu) \epsilon_{\beta\xi}^i$$

(B.10.a)

$$M_{\beta}^i = D (\chi_{\xi}^i + \nu \chi_{\beta}^i)$$

$$M_{\xi}^i = D (\chi_{\xi}^i + \nu \chi_{\beta}^i)$$

$$M_{\beta\xi}^i = 2D(1-\nu) \chi_{\beta\xi}^i ; i=0,1,2$$

e, de modo análogo, para o enrijecedor  $[20]$

$$N_{\zeta}^i = \eta K (\epsilon_{\zeta}^i + \nu \epsilon_{\xi}^i)$$

$$N_{\xi}^i = \eta K (\epsilon_{\xi}^i + \nu \epsilon_{\zeta}^i)$$

$$N_{\zeta\xi}^i = 2\eta K (1-\nu) \epsilon_{\zeta\xi}^i$$

(B.10.b)

$$M_{\zeta}^i = \eta^3 D (\chi_{\zeta}^i + \nu \chi_{\xi}^i)$$

$$M_{\xi}^i = \eta^3 D (\chi_{\xi}^i + \nu \chi_{\zeta}^i)$$

$$M_{\zeta\xi}^i = 2\eta^3 D (1-\nu) \chi_{\zeta\xi}^i ; i=0,1,2$$

onde  $K = E h_p / (1-\nu^2)$  é a rigidez extensional do painel e,  $D = K h_p^2 / 12$ , a rigidez flexural e os super-índices  $i=0,1,2$  denotam respectivamente os estados fundamental, incrementais linear e quadrático.

### B.5 - FORMA INCREMENTAL DA ENERGIA POTENCIAL TOTAL

Para relações cinemáticas não-lineares quadráticas, o funcional de energia potencial total será de grau quártico em  $\underline{u}_1$  (solução incremental) e a forma expandida (B.4) pode ser reescrita como,

$$\begin{aligned} V(\underline{u}_0 + \underline{u}_1, \phi) = & V_0(\underline{u}_0, \phi) + V_1(\underline{u}_1, \phi) + V_2(\underline{u}_1, \phi) + V_3(\underline{u}_1, \phi) + \\ & + V_4(\underline{u}_1, \phi) \end{aligned} \quad (B.11)$$

onde  $\underline{u}_0$  e  $\underline{u}_1$  são as soluções cinematicamente admissíveis respectivamente dos estados fundamental e incremental.

As contribuições de energia de funcional (B.11) são definidas como,

$$V_0(\underline{u}_0, \phi) = V_{0P}(\underline{u}_0, \phi) + V_{0S}(\underline{u}_0, \phi)$$

(B.12)

e

$$V_j(\underline{u}_1, \phi) = V_{jP}(\underline{u}_1, \phi) + V_{jS}(\underline{u}_1, \phi) ; j=1,2,3,4$$

onde os subíndices p e s referem-se ao painel e ao enrijecedor respectivamente.

Nos funcionais de energia (B.13) e (B.14), que se rão apresentados a seguir,  $\phi = (1-v^2) \sigma/E$  é o parâmetro de carga e  $\langle, \rangle$  denota o produto interno de tensores.

Para o painel cilíndrico, as contribuições de energia do funcional (B.11) são,

$$\begin{aligned} V_{0p}(\underline{u}_0, \phi) = & \frac{1}{2} \int_0^\lambda \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \left[ \langle \underline{\varepsilon}_p^0, \underline{N}_p^0 \rangle + \langle \underline{\chi}_p^0, \underline{M}_p^0 \rangle \right] R^2 d\beta d\xi \\ & + K \phi \int_0^\lambda \int_{-\beta_0}^{\beta_0} u'_{0p} R^2 d\beta d\xi \end{aligned} \quad (B.13.a)$$

$$\begin{aligned} V_{1p}(\underline{u}_1, \phi) = & \frac{1}{2} \int_0^\lambda \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \left[ \langle \underline{\varepsilon}_p^0, \underline{N}_p^1 \rangle + \langle \underline{\varepsilon}_p^1, \underline{N}_p^0 \rangle \right. \\ & \left. + \langle \underline{\chi}_p^0, \underline{M}_p^1 \rangle + \langle \underline{\chi}_p^1, \underline{M}_p^0 \rangle \right] R^2 d\beta d\xi \\ & + K \phi \int_0^\lambda \int_{-\beta_0}^{\beta_0} u'_{1p} R^2 d\beta d\xi \end{aligned} \quad (B.13.b)$$

$$\begin{aligned} V_{2p}(\underline{u}_1, \phi) = & \frac{1}{2} \int_0^\lambda \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \left[ \langle \underline{\varepsilon}_p^0, \underline{N}_p^2 \rangle + \langle \underline{\varepsilon}_p^1, \underline{N}_p^1 \rangle \right. \\ & + \langle \underline{\varepsilon}_p^2, \underline{N}_p^0 \rangle + \langle \underline{\chi}_p^0, \underline{M}_p^2 \rangle + \langle \underline{\chi}_p^1, \underline{M}_p^1 \rangle \\ & \left. + \langle \underline{\chi}_p^2, \underline{M}_p^0 \rangle \right] R^2 d\beta d\xi \end{aligned} \quad (B.13.c)$$

$$V_{3P}(\underline{u}_1, \phi) = \frac{1}{2} \int_0^\lambda \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \left[ \langle \underline{\varepsilon}_P^1, \underline{N}_P^2 \rangle + \langle \underline{\varepsilon}_P^2, \underline{N}_P^1 \rangle + \langle \underline{\chi}_P^1, \underline{M}_P^2 \rangle + \langle \underline{\chi}_P^2, \underline{M}_P^1 \rangle \right] R^2 d\beta d\xi \quad (B.13.d)$$

$$V_{4P}(\underline{u}_1, \phi) = \frac{1}{2} \int_0^\lambda \int_{\beta_0}^{\beta_0} \left[ \langle \underline{\varepsilon}_P^2, \underline{N}_P^2 \rangle + \langle \underline{\chi}_P^2, \underline{M}_P^2 \rangle \right] R^2 d\beta d\xi \quad (B.13.e)$$

Analogamente, para o enrijecedor tem-se,

$$V_{OS}(\underline{u}_0, \phi) = \frac{1}{2} \int_0^\lambda \int_{-\gamma}^{\gamma} \left[ \langle \underline{\varepsilon}_S^0, \underline{N}_S^0 \rangle + \langle \underline{\chi}_S^0, \underline{M}_S^0 \rangle \right] R^2 d\zeta d\xi + \eta K \phi \int_0^\lambda \int_{-\gamma}^{\gamma} u'_{OS} R^2 d\zeta d\xi \quad (B.14.a)$$

$$V_{1S}(\underline{u}_1, \phi) = \frac{1}{2} \int_0^\lambda \int_{-\gamma}^{\gamma} \left[ \langle \underline{\varepsilon}_S^0, \underline{N}_S^1 \rangle + \langle \underline{\varepsilon}_S^1, \underline{N}_S^0 \rangle + \langle \underline{\chi}_S^0, \underline{M}_S^1 \rangle + \langle \underline{\chi}_S^1, \underline{M}_S^0 \rangle \right] R^2 d\zeta d\xi + \eta K \phi \int_0^\lambda \int_{-\gamma}^{\gamma} u'_{1S} R^2 d\zeta d\xi \quad (B.14.b)$$



$$\begin{aligned}
 V_{2S}(\underline{u}_1, \phi) = & \frac{1}{2} \int_0^\lambda \int_{-\gamma}^\gamma \left[ \langle \underline{\epsilon}_S^0, \underline{N}_S^2 \rangle + \langle \underline{\epsilon}_S^1, \underline{N}_S^1 \rangle + \langle \underline{\epsilon}_S^2, \underline{N}_S^0 \rangle \right. \\
 & \left. + \langle \underline{\chi}_S^0, \underline{M}_S^2 \rangle + \langle \underline{\chi}_S^1, \underline{M}_S^1 \rangle + \langle \underline{\chi}_S^2, \underline{M}_S^0 \rangle \right] R^2 d\beta d\xi
 \end{aligned}$$

(B.14.c)

$$\begin{aligned}
 V_{3S}(\underline{u}_1, \phi) = & \frac{1}{2} \int_0^\lambda \int_{-\gamma}^\gamma \left[ \langle \underline{\epsilon}_S^1, \underline{N}_S^2 \rangle + \langle \underline{\epsilon}_S^2, \underline{N}_S^1 \rangle \right. \\
 & \left. + \langle \underline{\chi}_S^1, \underline{M}_S^2 \rangle + \langle \underline{\chi}_S^2, \underline{M}_S^1 \rangle \right] R^2 d\zeta d\xi
 \end{aligned}$$

(B.14.d)

$$V_{4S}(\underline{u}_1, \phi) = \frac{1}{2} \int_0^\lambda \int_{-\gamma}^\gamma \left[ \langle \underline{\epsilon}_S^2, \underline{N}_S^2 \rangle + \langle \underline{\chi}_S^2, \underline{M}_S^2 \rangle \right] R^2 d\zeta d\xi$$

(B.14.e)

## APÊNDICE C

### CARGA CRÍTICA LOCAL DO CILINDRO ENRIJECIDO PERFEITO

## APÊNDICE C

## CARGA CRÍTICA LOCAL DO CILINDRO ENRIJECIDO PERFEITO

A matriz  $\tilde{A}$  do problema de autovalor (II.2.17) é escrita como,

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -\hat{D}_\xi^2 - \frac{(1-\nu)}{2} \hat{D}_\beta^2 & -\frac{(1+\nu)}{2} \hat{D}_\xi \hat{D}_\beta & -\nu \hat{D}_\xi \\ -\frac{(1+\nu)}{2} \hat{D}_\xi \hat{D}_\beta & -\frac{(1-\nu)}{2} \hat{D}_\xi^2 - \hat{D}_\xi^2 & -\hat{D}_\beta \\ \nu \hat{D}_\xi & \hat{D}_\beta & 1 + \phi_c \hat{D}_\xi^2 + \alpha \nabla^4 \end{bmatrix} \quad (C.1)$$

onde  $\hat{D}_\xi$   $\hat{D}_\beta$  são operadores diferenciais lineares e  $\nabla^4 = (\hat{D}_\xi^2 + \hat{D}_\beta^2)^2$ .

As condições de contorno apropriadas para a cas cas simplesmente apoiada são:

$$u_1' + \nu(\dot{v}_1 + \dot{w}_1) = v_1 = w_1 = \dot{w}_1'' = w_1'' + \nu \dot{w}_1'' = 0$$

$$\text{em } \xi = 0, \lambda \quad (C.2)$$

$$v_1 = \dot{w}_1'' = v_1'' = \dot{w}_1'' = 0 \quad \text{em } \xi = 0, \lambda \text{ e } \beta = \beta_0.$$

e por compatibilidade na junção painel-enrijecedor,  $\beta = \beta_0$ :

$$u_1 = 0$$

$$w_1 = 0$$

$$\begin{aligned}
 & v_1^{\cdot} + w_1 + v u_1^{\cdot} + \eta \gamma \left[ \alpha \eta^2 (v_1^{''''} + \epsilon w_1^{\cdot''''}) \right. \\
 & \quad \left. + \phi_c (v_1^{''} + \epsilon w_1^{\cdot''}) \right] = 0 \\
 & \alpha (w_1^{\cdot\cdot} + v w_1^{''}) + \eta \gamma \left\{ \alpha \eta^2 \left[ \epsilon v_1^{''''} + \left( \epsilon^2 + \frac{\gamma^2}{3} \right) w_1^{\cdot''''} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - 2(1-v) w_1^{\cdot''} + \phi_c \left[ \epsilon v_1^{''} + \left( \epsilon^2 + \frac{\gamma^2}{3} \right) w_1^{\cdot''} \right] \right] \right\} = 0 \quad (C.3)
 \end{aligned}$$

A solução na forma (II.2.15) que atende às condições de contorno (C.2) e as condições de simetria é

$$u_{1p} = - A_1 \cos \hat{q} \xi \cos k \beta$$

$$v_{1p} = A_2 k \sin \hat{q} \xi \sin k \beta \quad ; \quad \hat{q} = n q \quad (C.4)$$

$$w_{1p} = - A_3 \sin \hat{q} \xi \cos k \beta$$

Substituindo (C.4) no problema de autovalor (II.2.17) e assumindo uma solução não-trivial para as constantes  $A_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) e para valores  $K_i$  ( $i=1, \dots, 4$ ), os coeficientes  $A_{ji}$  correspondentes a cada raiz  $k_i$  são relacionados por

$$A_{1i} = \psi_{1i} A_{3i} \quad (C.5)$$

$$A_{2i} = \psi_{2i} A_{3i}$$

onde

$$\psi_{1i} = - \frac{\hat{q} (k_i^2 - v\hat{q}^2)}{(k_i^2 + \hat{q}^2)^2} \quad (C.6)$$

$$\psi_{2i} = \frac{\hat{q}^2(v+2) + k_i^2}{(k_i^2 + \hat{q}^2)^2} ; \quad i = 1, \dots, 4$$

e onde  $k_i$  ( $i=1, \dots, 4$ ) são as raízes positivas da equação,

$$(\hat{q}^2 + k^2)^4 - \phi_c \hat{q}^2 (\hat{q}^2 + k^2)^2 + \hat{q}^4 (1 - v^2) = 0 \quad (C.7)$$

Assim, a solução (C.4) pode ser reescrita na forma,

$$u_{1p} = - \cos \hat{q} \xi \sum_{i=1}^4 \psi_{1i} A_{3i} \cos k_i \beta$$

$$v_{1p} = \sin \hat{q} \xi \sum_{i=1}^4 \psi_{2i} k_i A_{3i} \cos k_i \beta \quad (C.8)$$

$$w_{1p} = - \sin \hat{q} \xi \sum_{i=1}^4 A_{3i} \cos k_i \beta$$

Agora, substituindo (C.8) nas condições (C.3), obtem-se um conjunto de 4 equações lineares para os coeficientes  $A_{3i}$  ( $i=1, \dots, 4$ ), respectivamente dadas por,

$$- \sum_{i=1}^4 \Psi_{1i} A_{3i} \cos k_i \beta_0 = 0 \quad (C.10.a)$$

$$- \sum_{i=1}^4 A_{3i} \cos k_i \beta_0 = 0 \quad (C.10.b)$$

$$\sum_{i=1}^4 A_{3i} \left\{ \cos k_i \beta_0 (\Psi_{2i} k_i^2 + v \hat{q} \Psi_{1i} - 1) + \eta \gamma \hat{q}^2 (\Psi_{2i} + \epsilon) \sin k_i \beta_0 \left[ \alpha \eta^2 \hat{q}^2 - \phi_c \right] \right\} = 0 \quad (C.10.c)$$

$$\sum_{i=1}^4 A_{3i} \left\{ \alpha \cos k_i \beta_0 (v \hat{q}^2 + k_i^2) + \eta \gamma \hat{q}^2 k_i \sin k_i \beta_0 \left[ (\epsilon \Psi_{2i} + \epsilon^2 + \frac{\gamma^2}{3})(\alpha \eta^2 \hat{q}^2 - \phi_c) + 2(1-v) \alpha \eta^2 \hat{q}^2 \right] \right\} = 0 \quad (C.10.d)$$

Assumindo inicialmente um valor para  $\phi$  e obtendo para cada  $n$  e  $k_i$  ( $i=1, \dots, 4$ ) uma solução não-trivial para o sistema de equações (C.10.a-d), a carga crítica  $\phi_c$  corresponde ao menor valor de  $\phi$ , obtido para os diversos valores de  $n$  ( $n?$  de semi-ondas longitudinais).

Para finalizar, cumpre observar que as raízes  $k_i$  da equação (C.7) são complexas, sendo que os modos (C.4) apresentam, portanto, contribuições de parte real e imaginária dos  $k_i$ .

## LISTA DE SÍMBOLOS



# LISTA DE SÍMBOLOS

- $\tilde{A}$  - matriz de problema de autovalor
- $A_T$  - área da seção transversal da casca enrijecida
- $A_i$  - amplitudes de modos de deformação - (eq. C.4)
- $A_\xi$  - razão de rigidez extensional ortotrópica, =  $K_\xi/K$
- $\bar{a}_i$  - amplitudes de imperfeição
- $a_i$  - amplitudes de imperfeição não-dimensionais, =  $\bar{a}_i/R$
- $B_\xi$  - razão de rigidez flexural ortotrópica, =  $D_\xi/D$
- $B_{\xi\beta}$  - razão de rigidez torsional ortotrópica
- $c$  - semi-profundidade do enrijecedor
- $C_s$  - constante de parâmetro torsional
- $D$  - constante de rigidez flexural, =  $Kh_p^2/12$
- $d_s$  - profundidade do enrijecedor, =  $2c$
- $D_s$  - profundidade não-dimensional do enrijecedor, =  $d_s/h_s$
- $D_\xi$  - rigidez flexural axial ortotrópica
- $D_{\xi\beta}$  - rigidez torsional ortotrópica
- $\hat{D}_\xi, \hat{D}_\beta$  - operadores diferenciais lineares
- $e_s$  - excentricidade do enrijecedor
- $E$  - módulo de Young

$h_p$  - espessura do painel cilíndrico

$h_s$  - espessura do enrijecedor

$K$  - rigidez extensional,  $= Eh_p / (1 - \nu^2)$

$k_\xi$  - rigidez extensional axial ortotrópica

$k$  - nº de ondas circunferenciais - eq. (C.4)

$l$  - comprimento do cilindro

$m$  - nº de semi-ondas longitudinais dos modos (V.4)

$\tilde{M}_p$  - tensor de momentos do painel cilíndrico

$M_\beta, M_\xi, M_{\beta\xi}$  - componentes de momentos do tensor  $\tilde{M}_p$

$\tilde{M}_s$  - tensor de momentos do enrijecedor

$M_\zeta, M_\xi, M_{\zeta\xi}$  - componentes de momentos do tensor  $\tilde{M}_s$

$n$  - nº de semi-ondas longitudinais dos modos (III.8) ou (III.10)

$N$  - nº de painéis ou enrijecedores (par)

$\tilde{N}_p$  - tensor de esforços de membrana do painel,  $= (N_\beta, N_\xi, N_{\beta\xi})$

$N_\beta, N_\xi, N_{\beta\xi}$  - componentes de esforços de membrana do tensor  $\tilde{N}_p$

$\tilde{N}_s$  - tensor de esforços de membrana do enrijecedor,  $= (N_\zeta, N_\xi, N_{\zeta\xi})$

$N_\zeta, N_\xi, N_{\zeta\xi}$  - componentes de esforços de membrana do tensor  $\tilde{N}_s$

$p$  - nº de ondas circunferenciais de (III.8) ou (III.10),  $= N/2$

$q$  - parâmetro constante,  $= \Pi/\lambda$

$\hat{q}$  - parâmetro da eq. (C.4), =  $nq$

$\tilde{Q}$  - matriz de problema de autovalor de estabilidade global.

$R$  - raio do cilindro

$R_p$  - raio não-dimensional do cilindro, =  $R/h_p$

$s_s$  - espaçamento entre enrijecedores, =  $2\pi R/N$

$S_s$  - espaçamento não-dimensional entre enrijecedores, =  $s_s/R$

$\tilde{u}$  - campo de deslocamento dividido por  $R$ , =  $(u, v, w)$

$\bar{\tilde{u}}$  - campo de imperfeições geométricas iniciais, =  $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$

$\tilde{u}_0$  - campo de deslocamento do estado fundamental, =  $(u_0, v_0, w_0)$

$\tilde{u}_1$  - campo de deslocamento do estado incremental, =  $(u_1, v_1, w_1)$

$u_{01}, u_{02}, u_{03}, v_{02}, v_{03}, w_{01}, w_{02}, w_{03}$  - amplitudes dos  
de deformação da  
solução (III.10)

$U_1, V_1, W_1$  - amplitudes dos modos (V.4)

$V$  - energia potencial total

$V_0, V_1, V_2, V_3, V_4$  - componentes fundamental, linear quadrática  
cúbica e quártica da energia potencial to-  
tal, respectivamente.

$\hat{V}, \hat{V}_0, \hat{V}_1, \hat{V}_2, \hat{V}_3, \hat{V}_4$  - contribuições de energia potencial de  
estrutura imperfeita.

$\Delta V$  - variação da energia potencial total, =  $V_1 + V_2 + V_3 + V_4$

$x$  - coordenada axial.

y - coordenada circunferencial

z - coordenada radial

$\bar{z}_s$  - excentricidade ortotrópica do enrijecedor

$\bar{z}_s$  - excentricidade não-dimensional ortotrópica do enrijecedor  
 $z_s/R$

Z - parâmetro de Batdorf,  $= \ell^2 [1 - \nu^2]^{1/2} / \ell h_p$

$\alpha$  - constante adimensional,  $= h_p^2 / 12 R^2$

$\beta$  - angulo circunferencial,  $= Y/R$

$\beta_0$  - semi-ângulo de abertura entre enrijecedores,  $= \Pi/N$

$\gamma$  - semi-largura não-dimensional do enrijecedor,  $= c/R$

$\delta$  - operador variacional

$\delta_{mm}$  - operador delta de Kronecker

$\epsilon$  - excentricidade adimensional do enrijecedor,  $= e_s/R$

$\hat{\epsilon}$  - parâmetro de perturbação

$\underline{\epsilon}_p$  - tensor de deformação específica do painel  
 $, = (\epsilon_\beta, \epsilon_\xi, \epsilon_{\beta\xi})$

$\epsilon_\beta \epsilon_\xi \epsilon_{\beta\xi}$  - componentes de deformação específica do tensor  $\underline{\epsilon}_p$

$\underline{\epsilon}_s$  - tensor de deformação específica do enrijecedor  
 $, = (\epsilon_\zeta, \epsilon_\xi, \epsilon_{\zeta\xi})$

$\epsilon_\zeta, \epsilon_\xi, \epsilon_{\zeta\xi}$  - componentes de deformação específica do tensor  $\underline{\epsilon}_s$

$\zeta$  - coordenada radial não-dimensional,  $= z/R$

$\eta$  - razão entre as espessuras do enrijecedor e painel  
 $= h_s/h_p$

$\lambda$  - comprimento não-dimensional de cilindro,  $= l/R$

$\mu$  - constante adimensional,  $= \eta\gamma/\beta_0$

$\nu$  - coeficiente de Poisson

$\xi$  - coordenada axial adimensional,  $= x/R$

$\sigma$  - tensão axial

$\sigma_c$  - tensão axial crítica

$\sigma_{cm}$  - tensão axial crítica mínima

$\sigma_b$  - tensão crítica de bifurcação

$\sigma_{cp}$  - tensão crítica clássica do cilindro isotrópico  
 $= Eh_p/R [3(1-\nu^2)]^{1/2}$

$\sigma_{cs}$  - tensão crítica torsional do enrijecedor  
 $= k E h_s^2/c^2(1-\nu^2)$

$\chi_p$  - tensor de curvaturas do painel,  $= (\chi_\beta, \chi_\xi, \chi_{\beta\xi})$

$\chi_\beta, \chi_\xi, \chi_{\beta\xi}$  - componentes de curvatura do tensor  $\chi_p$

$\chi_s$  - tensor de curvaturas do enrijecedor,  $= (\chi_\zeta, \chi_\xi, \chi_{\zeta\xi})$

$\chi_\zeta, \chi_\xi, \chi_{\zeta\xi}$  - componentes de curvatura do tensor  $\chi_s$

$\phi$  - parâmetro de carga,  $= \sigma(1-\nu^2)/E$

$\phi_c$  - parâmetro de carga crítica

$\phi_b$  - parâmetro crítico de bifurcação

$\Psi$  - parâmetro de carga clássico de painéis cilíndricos  
 $, = 2 [\alpha (1-v^2)]^{1/2}$

$\nabla^4$  - operador bi-harmônico,  $= (\hat{D}_\xi^2 + \hat{D}_\beta^2)^2$

### Símbolos

$(v)$  - vetor ou tensor

$(-)$  - imperfeições

$( )'$  - operador de derivação em  $\xi = \frac{\partial}{\partial \xi}$

$( )''$  - operador de derivação em  $\beta = \frac{\partial}{\partial \beta}$

$( )'''$  - operador de derivação em  $\zeta = \frac{\partial}{\partial \zeta}$

$\langle, \rangle$  - produto interno

### Índices:

b - referente a bifurcação

c - quantidade crítica

cm - quantidade crítica mínima

I - estado incremental generalizado

p - referente ao painel

s - referente ao enrijecedor

$\beta$  - concernente ao direção circunferencial

$\xi$  - relativo a direção axial

$\zeta$  - referente a direção radial

0 - estado fundamental

1 - estado incremental linear

2 - estado incremental quadrático

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS



REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [ 1 ] - WALKER, A.C. and KEMP, P.- Buckling of Stringer Stiffened Welded Steel Cylinders, Discussion of Boss Conference, Norwegian Institute of Technology, 1976.
- [ 2 ] - SYNGELLAKIS, S. and WALKER, A.C. - Elastic Local Buckling of Longitudinally Stiffened Cylinders, Institute of Physics Conference, Cardiff, 1979, T.H. RICHARDS and P. STANLEY (Eds.). Applied Science Publishers, Barking, p. 159-178, 1979.
- [ 3 ] - SYNGELLAKIS, S. and WALKER, A.C. - Elastic Buckling of Stiffened Cylindrical Shells, Int. Symp. on the Integrity of Offshore Structures, Glasgow, 1978.
- [ 4 ] - SYNGELLAKIS, S. and WALKER, A.C. - Elastic Buckling of Cylinders with Widely Spaced Stiffeners, in: Theory of Shells, T. Koiter and G.K. MIKHALDY (Eds.), p.553-574, Holland Publishing Company, 1980.
- [ 5 ] - WALKER, A.C. and SRIDHARAN, S. - Analysis of the behaviour of Axially Compressed Stringer Stiffened Cylindrical Shells, Proc. Instn. Civ. Engrs. Part. 2, 69, p. 447-472, June, 1980.
- [ 6 ] - SINGER, J., ARBOCZ, J. AND BABCOCK, C.D. - Buckling of Imperfect Stiffened Cylindrical Shells Under Axial Compression, AIAA Journal, Vol. 9, Number 1, p.68-75, June, 1970.
- [ 7 ] - HUTCHINSON, J.W. and AMAZIGO, J.C. - Imperfection Sensitivity of Eccentrically Stiffened Cylindrical Shells, AIAA Journal, Vol. 5, p.392-401, 1967.

- [ 8 ] - ARBOCZ J. AND SECHLER, E.E. - On the Buckling of Stiffened Imperfect Shells, AIAA Journal, 14, p.1611-1617, Nov., 1976.
- [ 9 ] - ELLINAS, C.P., BATISTA, R.C. and CROLL, G.A. - Overall Buckling of Stringer Stiffened Cylinders, Proc. Instn. Civ. Engrs, Part 2, 71, p.479-512, June, 1981.
- [10] - SINGER, J. - Buckling, Vibrations and Post-Buckling of Stiffened Cylindrical Shells, BOSS International Conference, Norwegian Institute of Technology, Trondheim, 1976.
- [11] - ARBOCZ, J. and WILLIAMS, J.G. - Imperfection Surveys on a 10 tf. - Diameter Shells Structures, AIAA Journal, 15, Number 1, p.949-956, July, 1977.
- [12] - SINGER, J. and HAFTKA, R. - Buckling of Discretely Stringer Stiffened Cylindrical Shells and Elastically Restrained Panels, Tae Report Number 91, Technion, Haifa, 1974.
- [13] - KOITER, W.T. - Buckling and Post-Buckling Behaviour of a Cylindrical Panel Under Axial Compression, NLR Rep. 5476, Rep. Trans, Aero Res. Int., 20, 1956.
- [14] - WANG, J.T. and LIN, Y. - Stability of Discretely Stringer Stiffened Cylindrical Shells, AIAA Journal, Vol. 11, Number 1, p. 810-814, June, 1973.
- [15] - BATISTA, R.C. - Lower Bound Estimates for Cylindrical Shell Buckling, PHD Dissertation, University of London, 1979.
- [16] - ANTONINI, R.C. - Influência da Interação entre Modos e Imperfeições na Flambagem de Cascas Cilíndricas Axialmente Comprimidas, Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ, Setembro, 1981.

- [17] - BUDIANSKY, B. - Theory of Buckling and Post-Buckling Behaviour of Elastic Structures, in: Advances in Applied Mechanics, C.S. YIH (Ed.), Vol. 14, p.1-65, Academic Press, New York, 1974.
- [18] - SEIDE, P. - A Reexamination of KOITER's Theory of Post-Buckling Behaviour and Imperfection Sensitivity of Structures, In: Thin Shell Structures-Theory, Experimental and Design, Edited by Y.C. Fung and E.E. Sechler, Part II, p.59-80, Prentice Hall, 1974.
- [19] - KOITER, W.T. - Over de Stabiliteit van Het Elastisch Evenwicht, Thesis, Delft, H.J. Paris, Amsterdam, 1945, English Translation Affdl-Tr-70-25, 1970.
- [20] - BRUSH, D.O. and ALMROTH, B.O. - Buckling of Bars, Plates and Shells, McGraw-Hill. Book Co., p.142-182, 1975.
- [21] - CROLL, J.G.A. and BATISTA, R.C. - Explicit Lower Bounds for the Buckling of Axially Loaded Cylinders, Int. J. Mech. Sci, Vol. 23, 6, p.331-343, 1981.
- [22] - KOITER, W.T. - General Equations of Elastic Stability for Thin Shells, Proc.(Symp.) on the Theory of Shells in Honour of L.H. Donnell, University of Houston, 1967.
- [23] - TIMOSHENKO, S.P. and GERE, J.M. - Theory of Elastic Stability, Second Edition, McGraw-Hill, New York, 1961.
- [24] - ASHWELL, D.G. - Nonlinear Problems, Handbook of Engineering Mechanics (Ed. by W. Flugge), Chapter 45, p. 45-1, 45-19, McGraw-Hill, New York, 1962.